Estimation

I. Définition

Soit X une variable aléatoire qui suit une loi Binomiale de paramètre n et p (B (n,p)) et soit Fn=X/n ou p est la proportion inconnue d'apparition d'un caractère.

- Alors, l'intervalle [Fn-1/√n ;Fn+1/√n] contient pour un n assez grand la proportion p avec une probabilité supérieure ou égale à 0.95.
- On appelle f la fréquence d'apparition du caractère sur un échantillon de taille n. Alors l'intervalle [f-1/√n ;f+1/√n]. Cet intervalle est appelé « intervalle de confiance de p au niveau de confiance 0.95 »

II. Preuve :

Soit :

$$\lim_{n \to +\infty} P(p - u_\alpha \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \leq F_n \leq p + u_\alpha \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}) = 1 - \alpha$$

Si on pose f(p)=1.96√(p*(1-p)) pour tout pϵ[0 ;1] et f dérivable sur]0 ;1[et f'(p)=1.96*(-2p+1)/(2√p(1-p) est du signe de -2p+1. On en déduit le tableau de variation :

p	0		$\frac{1}{2}$		1
$f'(p)$		$+$	0	$-$	
$f(p)$			$0{,}98$		
		$\nearrow$		$\searrow$	
	0				0

Pour tout p$\in$[0 ;1], 0<f(p)<1 ce qui implique :

$$p-\frac{1}{\sqrt{n}}<F_n<p+\frac{1}{\sqrt{n}}$$

D'où p> Fn-1/√n et p>Fn+1/√n donc :

$$F_n-\frac{1}{\sqrt{n}}<p<F_n+\frac{1}{\sqrt{n}}$$

III. Exercice :

On veut estimer une proportion sur 90 élèves de terminale 6 seulement sont abonnés à un journal d'information. Déterminons un intervalle de confiance au niveau 95% de la proportion de la population qui est abonné à un journal d'information.

On identifie les variables :

- La taille de l'échantillon n=90
- Niveau de confiance 1-α=95%=0.95
- La fréquence observée= 6/90=0.67

On vérifie les conditions :

- n=90 >30
- n*f=6>5
- n*(1-f)=84>5

Les conditions sont vérifiées on applique la méthode :

$$\left[f - \frac{1}{\sqrt{n}} ; f + \frac{1}{\sqrt{n}} \right]$$

Et on obtient :

[-0.04 ; 0.17]

Or on rappelle qu'une proportion ne peut pas être négative (on a p∈[0 ;1]) donc on peut réduire l'intervalle à :

[0 ; 0.17]