AMÉRIQUE DU NORD MAI 2018

MATHÉMATIQUES TS OBLIGATOIRE

Exercice 1

Partie A - Démonstration préliminaire

1. La fonction G est dérivable sur l'intervalle $[0;+\infty[$ comme produit de fonctions dérivables sur cet intervalle.

$$\begin{aligned} G'(t) &= -\mathrm{e}^{-0,2t} - 0,2(-t-5)\mathrm{e}^{-0,2t} \\ &= (-1+0,2t+1)\mathrm{e}^{-0,2t} \\ &= 0,2t\mathrm{e}^{-0,2t} \\ &= g(t) \end{aligned}$$

La fonction G est bien une primitive de la fonction g sur l'intervalle $[0;+\infty[$.

2. On a : $\displaystyle\int_0^x 0,2t\mathrm{e}^{-0,2t}\mathrm{d}t = G(x) - G(0) = -x\mathrm{e}^{-0,2x} - 5\mathrm{e}^{-0,2x} + 5.$

Or $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x\mathrm{e}^{-0,2x} = 0.$

☛ On utilise la composition des limites. De plus $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} -0,2x = -\infty$ et $\displaystyle\lim_{X\to-\infty} \mathrm{e}^X = 0$ donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} e^{-0,2x} = 0.$

Ainsi $E(X) = \displaystyle\lim_{x\to+\infty} x\mathrm{e}^{-0,2x} - 5\mathrm{e}^{-0,2x} + 5 = 5.$

Partie B - Étude de la durée de présence d'un client dans le supermarché

1. La variable aléatoire $Z = \dfrac{X-40}{\sigma}$ suit la loi normale centrée réduite.

$$\begin{aligned} P(T<10)=0,067 &\Leftrightarrow P(T-40<-30)=0,067 \\ &\Leftrightarrow P\left(\frac{T-40}{\sigma}<-\frac{30}{\sigma}\right)=0,067 \\ &\Leftrightarrow P\left(Z<-\frac{30}{\sigma}\right)=0,067 \end{aligned}$$

À l'aide de la calculatrice, on trouve $-\dfrac{30}{\sigma} \approx -1,476$

☛ On utilise la touche *inverse loi normale*

Donc $\sigma \approx 20$.

2. On veut calculer : $P(T>60)=0,5-P(40<T<60)\approx 0,159$.

Environ 15,9% des clients passent plus d'une heure dans le supermarché.

Partie C - Durée d'attente pour le paiement

1. **a.** $E(X)=\dfrac{1}{\lambda}=5$.

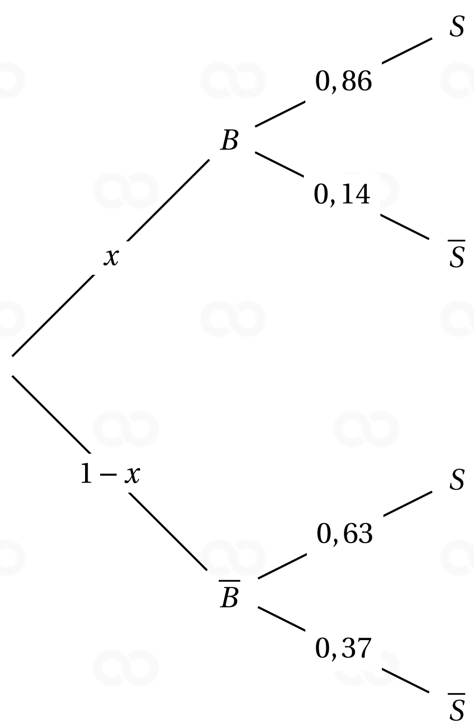
En moyenne un client attend 5 min à une borne automatique.

b. $P(T>10)=\mathrm{e}^{-0,2\times 10}=\mathrm{e}^{-2}\approx 0,135$.

La probabilité que la durée d'attente d'un client à une borne automatique de paiement soit supérieure à 10 minutes est environ égal à 0,135.

2. On appelle x la probabilité qu'un client choisissent une borne automatique de paiement.

☛ Il est préférable de représenter la situation à l'aide d'un arbre de probabilité



D'après la formule des probabilités totales on a :

$$\begin{aligned} p(S) \geqslant 0,75 &\Leftrightarrow p(S \cap B) + p\left(S \cap \overline{B}\right) \\ &\Leftrightarrow 0,86x + 0,63(1-x) \geqslant 0,75 \\ &\Leftrightarrow 0,23x \geqslant 0,12 \\ &\Leftrightarrow x \geqslant \frac{12}{23} \end{aligned}$$

Il faut donc que la proportion minimale de clients qui doivent choisir une borne automatique de paiement pour que l'objectif soit atteint est donc $\frac{12}{23}$.

Partie D - Bons d'achat

1. ☛ Il ne faut pas oublier de nommer la variable aléatoire et de dire ce qu'elle représente.

On appelle C la variable aléatoire comptant le nombre de cartes gagnantes.

Le client effectue pour $158,02$ € d'achats. Il obtient donc 15 cartes.

On effectue donc 15 tirages aléatoires, identiques, indépendants. Chaque tirage possède deux issues : G, "la carte est gagnante", et $\overline{G}$.

De plus $p(G) = 0,005$.

La variable aléatoire C suit donc la loi binomiale de paramètres $n = 15$ et $p = 0,005$.

Ainsi $P(C \geqslant 1) = 1 - P(C = 0) = 1 - (1 - 0,005)^{15} \approx 0,07$.

2. ☛ Il est préférable de changer de variable aléatoire car les paramètres ne sont plus les mêmes.

On appelle D la variable aléatoire comptant le nombre de cartes gagnantes.

On effectue n tirages aléatoires, identiques, indépendants. Chaque tirage possède deux issues : G, "la carte est gagnante", et $\overline{G}$.

De plus $p(G) = 0,005$.

La variable aléatoire D suit donc la loi binomiale de paramètres n et $p = 0,005$.

$$\begin{aligned} P(D \geqslant 1) > 0,5 &\Leftrightarrow 1 - (1 - 0,005)^n > 0,5 \\ &\Leftrightarrow 0,995^n < 0,5 \\ &\Leftrightarrow n \ln(0,995) < \ln(0,5) \\ &\Leftrightarrow n > \frac{\ln(0,5)}{\ln(0,995)} \end{aligned}$$

Or $\frac{\ln(0,5)}{\ln(0,995)} \approx 138,3$.

☛ Quand on divise par un nombre négatif on change le sens des inégalités.

Il faut donc que $n \geqslant 139$. Cela signifie que le montant d'achats soit supérieur à 1 390 €.

Exercice 2

1. f admet un maximum sur l'intervalle $[0;1[$ quand :

$$\begin{aligned} f'(x) = 0 &\Leftrightarrow \frac{-bx+b-2}{1-x} = 0 \\ &\Leftrightarrow -bx+b-2 = 0 \\ &\Leftrightarrow bx = b-2 \\ &\Leftrightarrow x = 1-\frac{2}{b} \end{aligned}$$

Le maximum est donc :

$$\begin{aligned} f\left(1-\frac{2}{b}\right) &= b-2+2\ln\left(1-1+\frac{2}{b}\right) \\ &= b-2+2\ln\left(\frac{2}{b}\right) \end{aligned}$$

2. ☛ On va montrer qu'il existe une seule valeur de b pour laquelle le maximum atteint la hauteur 1,6.

On considère la fonction g définie sur $[2;+\infty[$ par $g(x) = x-2+2\ln\left(\frac{2}{x}\right)$.

La fonction g est dérivable sur $[2;+\infty[$ comme somme de fonctions dérivables sur cet intervalle.

$g'(x) = 1+2\times\dfrac{-\frac{2}{x^2}}{\frac{2}{x}} = 1-\dfrac{2}{x}$.

$$\begin{aligned} g'(x) > 0 &\Leftrightarrow 1-\frac{2}{x} > 0 \\ &\Leftrightarrow 1 > \frac{2}{x} \\ &\Leftrightarrow 1 < \frac{x}{2} \\ &\Leftrightarrow 2 < x \end{aligned}$$

La fonction g est donc strictement croissante et continue (car dérivable) sur l'intervalle $[2;+\infty[$.

$g(2) = 0 < 1,6$

$g(x) = x\left(1-\frac{2}{x}+\frac{2}{x}\ln\left(\frac{2}{x}\right)\right)$ $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2}{x} = 0$ et $\lim\limits_{x\to 0} X\ln X = 0$.

Donc $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$.

Ainsi $1,6 \in [0;+\infty[$.

D'après le théorème de la bijection (ou corollaire du théorème des valeurs intermédiaires) l'équation $g(x) = 1,6$ possède donc, sur l'intervalle $[2;+\infty[$ une unique solution $\alpha \approx 5,69$.

La fonction g est strictement croissante.

Ainsi la hauteur maximale du projectile ne dépasse pas $1,6$ mètre quand b appartient à l'intervalle $[2;\alpha]$.

3. On a $f'(x) = \dfrac{-5,69x + 5,69 - 2}{1 - x}$

Donc $f'(0) = 3,69$.

Un vecteur directeur de la tangente est par conséquent $\vec{u}(1;3,69)$.

Par conséquent $\tan\theta = \dfrac{3,69}{1}$ donc $\theta \approx 74,8°$.

Exercice 3

1. **a.** Un vecteur directeur de (AB) est $\overrightarrow{AB}\,(10;-8;2)$.

Un vecteur directeur de (CD) est $\overrightarrow{CD}\,(15;12;3)$.

b. ☛ Deux droites ne sont pas coplanaires si elles ne sont ni sécantes ni parallèles.

On a $\dfrac{10}{15} = \dfrac{2}{3}$

Et $\dfrac{-8}{12} = -\dfrac{2}{3}$.

Les coordonnées ne sont pas proportionnelles.

Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ ne sont pas colinéaires et les droites (AB) et (CD) ne sont pas parallèles.

Regardons maintenant si les droites sont sécantes.

Une représentation paramétrique de (AB) est : $\begin{cases} x = 10t \\ y = -8t \\ z = 2t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$.

Une représentation paramétrique de (CD) est : $\begin{cases} x = -1 + 15k \\ y = -8 + 12k \\ z = 5 + 3k \end{cases}, k \in \mathbb{R}$

Remarque : Attention à bien prendre deux paramètres différents pour la suite.

Cherchons les solutions du système :

$$\begin{cases} x = 10t \\ y = -8t \\ z = 2t \\ x = -1 + 15k \\ y = -8 + 12k \\ z = 5 + 3k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 10t \\ y = -8t \\ z = 2t \\ 10t = -1 + 15k \\ -8t = -8 + 12k \\ 2t = 5 + 3k \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 10t \\ y = -8t \\ z = 2t \\ 10t = -1 + 15k \quad (1) \\ -8t = -8 + 12k \\ 10t = 25 + 15k \quad (2) \end{cases}$$

Les lignes (1) et (2) sont incompatibles. Il n'y a donc pas de point d'intersection.
Les droites (AB) et (CD) ne sont pas coplanaires.

2. **a.** L'abscisse du point I est 5.
Par conséquent $10t = 5 \Leftrightarrow t = 0,5$.

Ainsi les coordonnées du point I sont $\begin{cases} x_I = 5 \\ y_I = -4 \\ z_I = 1 \end{cases}$.

L'abscisse du point J est 4.

par conséquent $-1 + 15k = 4 \Leftrightarrow 15k = 5 \Leftrightarrow k = \dfrac{1}{3}$.

Ainsi les coordonnées du point J sont $\begin{cases} x_J = 4 \\ y_J = -4 \\ z_J = 6 \end{cases}$.

Donc :

$$\begin{aligned} IJ &= \sqrt{(4-5)^2 + (-4-(-4))^2 + (6-1)^2} \\ &= \sqrt{1+0+25} \\ &= \sqrt{26} \end{aligned}$$

b. On a $\overrightarrow{IJ}\,(-1;0;5)$, $\overrightarrow{AB}\,(10;-8;2)$ et $\overrightarrow{CD}\,(15;12;3)$
D'une part $\overrightarrow{IJ}.\overrightarrow{AB} = -10+0+10 = 0$
D'autre part $\overrightarrow{IJ}.\overrightarrow{AB} = -15+0+15 = 0$.
Le vecteur $\overrightarrow{IJ}$ est donc normal aux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$.
Les droites (IJ) et (AB) d'une part et (IJ) et (CD) d'autre part sont donc orthogonales.
Mais (IJ) et (AB) sont sécantes en I et les droites (IJ) et (CD) sont sécantes en J.
La droite (IJ) est donc perpendiculaire aux droites (AB) et (CD).

3. **a.** Le point I n'appartenant pas à la droite (CD); le point I et la droite (CD) définissent le plan (IJM').
La droite Δ est parallèle à (CD) et passe par le point I : elle est donc incluse dans le plan (IJM').
Ainsi, dans le plan (IJM'), les droites (JM) et Δ sont parallèles et la droite (IJ) est perpendiculaire à la droite Δ.
La droite parallèle à la droite (IJ) passant par le point M' est donc également perpendiculaire à la droite Δ : ces deux droites ont bien un point d'intersection appelé P.

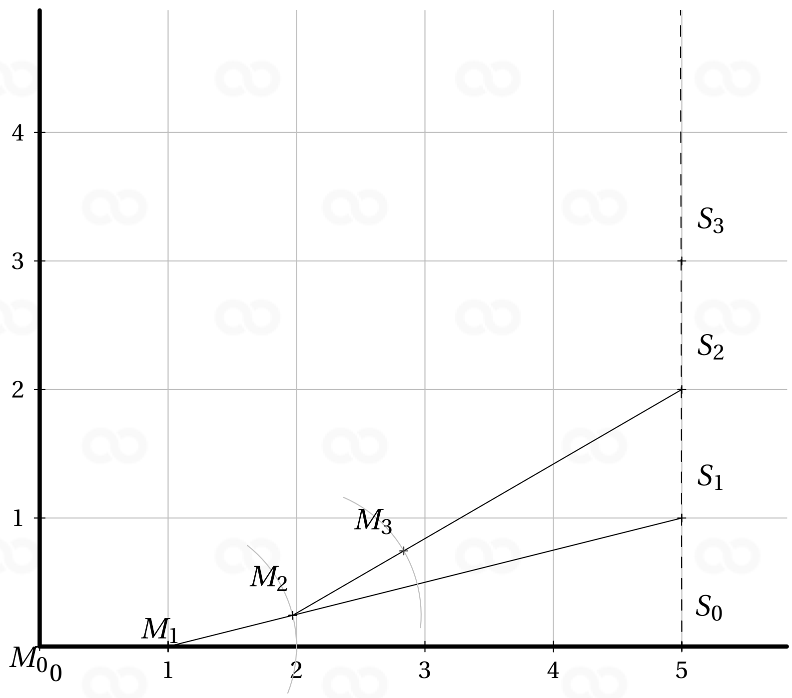
b. Les droites (IJ) et $(M'P)$ sont parallèles par conséquent les vecteurs $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{M'P}$ sont colinéaires.
Le vecteur $\overrightarrow{M'P}$ est alors orthogonal à $\overrightarrow{IP}$ ($(M'P)$ et Δ sont perpendiculaires) et à $\overrightarrow{IM}$ (car $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{AB}$ le sont).
La droite Δ est parallèle à (CD). D'après la question 1.b. elle n'est donc pas parallèle à la droite (AB).
Les droites Δ et (AB) sont sécantes en I : elles définissent le plan (IMP).

Le vecteur $\overrightarrow{M'P}$ est donc orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (IMP). Il est par conséquent orthogonal à tous les vecteurs de ce plan en particulier à $\overrightarrow{MP}$.
Le triangle MPM' est ainsi rectangle en P.

c. Dans un triangle rectangle, la longueur de l'hypoténuse est plus grande que la longueur des deux côtés de l'angle droit.
Ainsi $MM' > M'P$ or $IJ = M'P$.
Par conséquent $MM' > IJ$.

Exercice 4
Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité
Partie A - Modélisation à l'aide d'une suite

1. On obtient le graphique suivant :



☛ on n'oublie pas que le chien avance d'une unité.

2. $d_0 = 5$ et $d_1 = \sqrt{(5-1)^2 + (1-0)^2} = \sqrt{16+1} = \sqrt{17}$

3. Déterminons une équation de la droite (M_1S_1).
Les points M_1 et S_1 n'ont pas la même abscisse.
Une équation de cette droite sera donc de la forme $y = ax + b$.
$a = \dfrac{1-0}{5-1} = \dfrac{1}{4}$.

Donc une équation de la droite est de la forme $y = \frac{1}{4}x + b$.

Le point M_1 de coordonnées $(1;0)$ appartient à la droite.

Ainsi $0 = \frac{1}{4} + b \Leftrightarrow b = -\frac{1}{4}$.

Une équation de la droite (M_1S_1) est donc $y = \frac{1}{4}(x-1)$

Si $x = 1 + \frac{4}{\sqrt{17}}$ alors $y = \frac{1}{4} \times \frac{4}{\sqrt{17}} = \frac{1}{\sqrt{17}}$.

Le point $A\left(1 + \frac{4}{\sqrt{17}}; \frac{1}{\sqrt{17}}\right)$ appartient bien à la droite.

Vérifions que $M_1A = 1$.

$$M_1A = \sqrt{\left(\frac{4}{\sqrt{17}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{17}}\right)^2} = \sqrt{\frac{16}{17} + \frac{1}{17}} = 1.$$

Le point M_2 a donc pour coordonnées $\left(1 + \frac{4}{\sqrt{17}}; \frac{1}{\sqrt{17}}\right)$.

4. **a.** En $C5$ on doit écrire $= C4 + (A4 - B4)/F4$

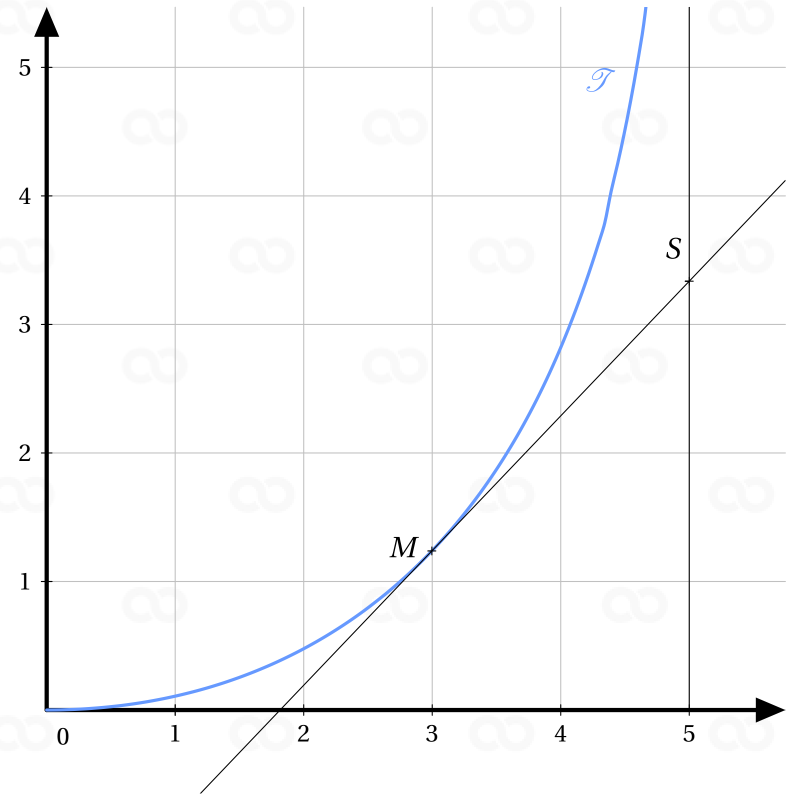
En $F5$ on doit écrire $=$ RACINE$((D5 - B5)\hat{}2 + (E5 - C5)\hat{}2)$.

b. La suite (d_n) est décroissante et minorée par 0 (une distance est positive). Cette suite est donc convergente.

Il semblerait que sa limite soit $2,773\,165\,8$.

Partie B - Modélisation à l'aide d'une fonction

1. **a.** On obtient le graphique suivant :



Graphiquement, les coordonnées du point S sont alors $(5;3,3)$.

b. On a $f'(3) = \dfrac{3(1-0,3)}{5-3} = 1,05$.

Une équation de la tangente en M à la courbe est donc de la forme $y = 1,05x + b$.

$f(3) = -2,5\ln(1-0,6) - 0,5 \times 3 + 0,05 \times 9 = -2,5\ln(0,4) - 1,05$.

Le point M de coordonnées $\left(3; f(3)\right)$ appartient à la tangente.

Ainsi $-2,5\ln(0,4) - 1,05 = 1,05 \times 3 + b \Leftrightarrow b = -2,5\ln(0,4) - 4,2$.

Une équation de la tangente est donc $y = 1,05x - 2,5\ln(0,4) - 4,2$.

Le point S a pour abscisse 5.

Son ordonnée est donc $y_S = 1,05 \times 5 - 2,5\ln(0,4) - 4,2 \approx 3,34$.

2. $\lim\limits_{x \to 5} d(x) = 0,1 \times 5^2 - 5 + 5 = 2,5$.

Par conséquent la distance MS se rapproche de $2,5$.