LOGARITHME NÉPÉRIEN

I Généralités

On a vu dans le chapitre sur la fonction exponentielle que celle-ci était continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$. De plus $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{e}^x = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^x = +\infty$. Par conséquent, d'après le théorème de la bijection, pour tout $b > 0$, il existe un unique réel a tel que $\mathrm{e}^a = b$.

Définition 1

On note, pour tout réel strictement positif b, $\ln b$, logarithme népérien de b, l'unique solution de l'équation $\mathrm{e}^x = b$
La fonction ln est la fonction qui a tout réel x strictement positif associe $y = \ln x$.

Remarque : On dit que la fonction ln est la fonction réciproque de la fonction exponentielle. Les courbes de ces 2 fonctions sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$.

Propriété 1

1. $y = \ln x$ où $x > 0 \Leftrightarrow \mathrm{e}^y = x$
2. $\ln 1 = 0$ et $\ln \mathrm{e} = 1$
3. $\forall x > 0, \mathrm{e}^{\ln x} = x$
4. $\forall x \in \mathbb{R}, \ln(\mathrm{e}^x) = x$
5. La fonction ln est définie et continue sur $\mathbb{R}$.

Ces propriétés découlent directement de la définition de la fonction ln.

Propriété 2

La fonction ln est dérivable sur $]0;+\infty[$ et, pour tout $x \in]0;+\infty[$ $\ln'(x) = \dfrac{1}{x}$.

Preuve

Soit b un réel strictement positif.

$$\frac{\ln x-\ln b}{x-b}=\frac{\ln x-\ln b}{e^{\ln x}-e^{\ln b}}=\frac{1}{\dfrac{e^{\ln x}-e^{\ln b}}{\ln x-\ln b}}$$

Étudions $\dfrac{e^{\ln x}-e^{\ln b}}{\ln x-\ln b}$. Posons pour cela $X=\ln x$. On a alors :

$$\frac{e^{\ln x}-e^{\ln b}}{\ln x-\ln b}=\frac{e^{X}-e^{\ln b}}{X-\ln b}$$

La fonction ln est continue donc $\lim\limits_{x\to b}\ln x=\ln b$.
Par conséquent $\lim\limits_{x\to b}X=\ln b$.
Donc $\lim\limits_{x\to b}\dfrac{e^{X}-e^{\ln b}}{X-\ln b}=e^{\ln b}$ (nombre dérivé de la fonction exponentielle en $\ln b$).
Par conséquent $\lim\limits_{x\to b}\dfrac{e^{\ln x}-e^{\ln b}}{\ln x-\ln b}=e^{\ln b}=b$.
Donc $\lim\limits_{x\to b}\dfrac{\ln x-\ln b}{x-b}=\dfrac{1}{b}$.
La fonction ln est donc dérivable sur $]0;+\infty[$ et, pour tout $x\in]0;+\infty[$ $\ln'(x)=\dfrac{1}{x}$.

Propriété 3

La fonction ln est strictement croissante sur $]0;+\infty[$.

Preuve

Pour tout $x\in]0;+\infty[$ $\ln'(x)=\dfrac{1}{x}>0$.

Propriété 4

1. $\forall x>0, \ln x<0 \Leftrightarrow 0<x<1$
2. $\forall x>0, \ln x>0 \Leftrightarrow x>1$

Preuve

La fonction ln est strictement croissante sur $]0;+\infty[$ et $\ln 1 = 0$

Propriété 5

1. Pour tous les réels a et b strictement positifs, $\ln a = \ln b \Leftrightarrow a = b$
2. Pour tous les réels a et b strictement positifs, $\ln a < \ln b \Leftrightarrow a < b$

Preuve

La fonction ln est strictement croissante sur $]0;+\infty[$.

Remarque : Il faut absolument définir au préalable sur quel partie de $\mathbb{R}$ les inéquations sont définies.

Exemple : On veut résoudre $\ln[(x-5)(3-x)] \leq \ln[(x-5)(-x+2)]$
Pour que le premier logarithme soit défini il faut donc que $(x-5)(3-x) > 0$ soit $x \in]3;5[$
De la même manière, le second logarithme n'est défini que pour $x \in]2;5[$
L'inéquation n'est définie que pour $x \in]3;5[$
D'après la propriété, l'inéquation est équivalente à :

$$(x-5)(3-x) \leq (x-5)(-x+2) \Leftrightarrow (x-5)[(3-x)-(-x+2)] \leq 0$$
$$\Leftrightarrow (x-5) \times 1 \leq 0 \qquad \Leftrightarrow x \leq 5$$

Par conséquent la solution est $]-\infty;5] \cap]3;5[=]3;5[$.

II Propriétés algébriques

Propriété 6

Pour tous réels a et b strictement positifs, $\ln(ab) = \ln a + \ln b$.

Preuve

On peut écrire $e^{\ln a} = a$, $e^{\ln b} = b$ et $e^{\ln(ab)} = ab$
Par conséquent $e^{\ln a} \times e^{\ln b} = e^{\ln(ab)}$ or $e^{\ln a} \times e^{\ln b} = e^{\ln a + \ln b}$.
Donc $e^{\ln a + \ln b} = e^{\ln(ab)}$.
D'où $\ln(ab) = \ln a + \ln b$.

Exemple : $\ln 10 = \ln(2 \times 5) = \ln 2 + \ln 5$

Propriété 7

Pour tout réel $a > 0$, $\ln \frac{1}{a} = -\ln a$

Preuve

$\frac{1}{a} \times a = 1$ donc $\ln \frac{1}{a} + \ln a = \ln 1$ soit $\ln \frac{1}{a} + \ln a = 0$

D'où : $\ln \frac{1}{a} = -\ln a$

Exemple : $\ln 0,5 = \ln \frac{1}{2} = -\ln 2$

Propriété 8

Pour tout réel $a > 0$ et tout entier relatif n, $\ln(a^n) = n \ln a$.

Preuve

Montrons tout d'abord la propriété pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Initialisation : Si $n = 0$. $\ln a^0 = \ln 1 = 0 = 0 \times \ln a$.

La propriété est vraie au rang 0.

Hérédité : Supposons la propriété vraie au rang n. Alors $\ln(a^n) = n \ln a$.

Donc $\ln(a^{n+1}) = \ln(a \times a^n) = \ln a + \ln(a^n) = \ln a + n \ln a = (n+1) \ln a$

La propriété est donc vraie au rang $(n+1)$.

Conclusion : La propriété est vraie au rang 0. En la supposant vraie au rang n, elle est encore vraie au rang suivant. Donc pour tout $n \in N$, $\ln(a^n) = n \ln a$.

Prenons maintenant un entier relatif n strictement négatif. Cela signifie donc que $-n \in N$.

$\ln(a^n) = \ln\left(\frac{1}{a^{-n}}\right) = \ln\left(\frac{1}{a}\right)^{-n} = -n \ln \frac{1}{a} = n \ln a$.

Exemple : $\ln 1\,000 = \ln 10^3 = 3 \ln 10$

Propriété 9

Pour tous réels a et b strictement positifs, $\ln\frac{a}{b} = \ln a - \ln b$

Preuve

$\ln\frac{a}{b} = \ln a \times \frac{1}{b} = \ln a + \ln\frac{1}{b} = \ln a - \ln b$

Exemple : $\ln\frac{5}{3} = \ln 5 - \ln 3$

Propriété 10

Pour tout réel $a > 0$, $\ln\sqrt{a} = \frac{1}{2}\ln a$

Preuve

$2\ln\sqrt{a} = \ln\left(\sqrt{a}\right)^2 = \ln a$.

Donc $\ln\sqrt{a} = \frac{1}{2}\ln a$.

Exemple : $\ln\sqrt{5} = \frac{1}{2}\ln 5$

III Limites

Propriété 11

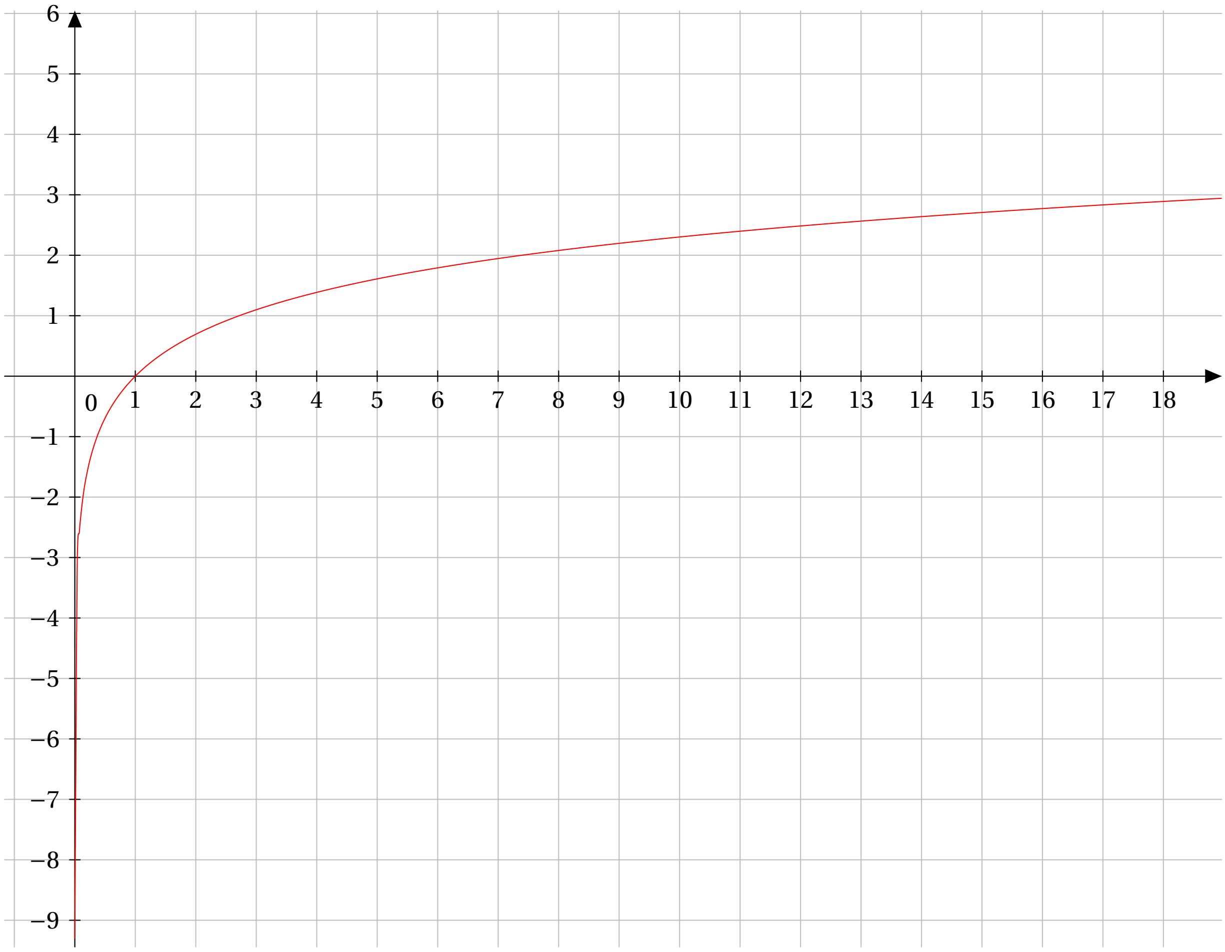
$\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln x = -\infty$.

Preuve

Soit A un réel strictement positif quelconque.
Si $x > e^A$, puisque la fonction ln est strictement croissante sur $]0;+\infty[$, $\ln x > \ln e^A$ c'est-à-dire $\ln x > A$.
On en déduit donc que $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$.

Soit x un réel strictement positif alors $\ln x = -\ln \frac{1}{x}$.
Donc $\lim\limits_{x \to 0^+} \ln x = -\lim\limits_{x \to 0^+} \ln \frac{1}{x}$
Mais $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$ par conséquent $\lim\limits_{x \to 0^+} \ln \frac{1}{x} = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to 0^+} \ln x = -\infty$

x	0	$+\infty$
ln	$-\infty$	$\nearrow$ $+\infty$



Propriété 12

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$

Preuve

$\dfrac{\ln(1+x)}{x} = \dfrac{\ln(1+x)-\ln 1}{1+x-1}$.
La fonction ln est dérivable sur $]0;+\infty[$ donc en particulier en 1.
$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = \ln'(1) = 1$

Propriété 13

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x^n} = 0$ pour tout entier naturel $n \geq 1$. En particulier $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$.
2. $\lim\limits_{x\to 0^+} x^n \ln x = 0$ pour tout entier naturel $n \geq 1$. En particulier $\lim\limits_{x\to 0} x\ln x = 0$.

IV Ln et fonctions composées

Propriété 14

Soit u une fonction dérivable et strictement positive sur un intervalle I alors la fonction $\ln u$ est définie et dérivable sur I et $(\ln u)'(x) = \dfrac{u'(x)}{u(x)}$ pour tout $x \in I$

Exemple : Considérons la fonction f définie par $f(x) = \ln(4x^2+3x-1)$.
La fonction f est définie là où $4x^2+3x-1>0$.
$\Delta = 3^2 - 4\times 1\times(-4) = 25$. Il y a donc 2 racines $x_1 = \dfrac{-3-5}{8} = -1$ et $x_2 = \dfrac{-3+5}{8} = \dfrac{1}{4}$.
Par conséquent f est définie et dérivable sur $I =]-\infty;-1[\cup\left]\dfrac{1}{4};+\infty\right[$ et $f'(x) = \dfrac{8x+3}{4x^2+3x-1}$ sur I.

V Fonction logarithme décimal

Définition 2

On appelle fonction logarithme décimal la fonction notée log définie sur $]0;+\infty[$ par

$$\log x = \frac{\ln x}{\ln 10}$$

Conséquence : Pour tout entier relatif n on a $\log 10^n = \frac{\ln 10^n}{\ln 10} = \frac{n \ln 10}{\ln 10} = n$.

Propriété 15

1. $\log 10 = 1$ et $\log 1 = 0$.
2. La fonction log est définie, dérivable et strictement croissante sur $]0;+\infty[$.
3. Pour tout réels a et b strictement positifs et n entier relatif quelconque :

$$\log(ab) = \log a + \log b$$
$$\log \frac{a}{b} = \log a - \log b$$
$$\log\left(a^n\right) = n \log a$$

Utilisation de la fonction log

- pH : $\text{ph} = -\log\left[H_3O^+\right]$ où $\left[H_3O^+\right]$ est exprimé en mol.L^{-1}.
- Echelle de Richter : magnitude $= \log \frac{I}{I_0}$ où I est l'intensité du séisme et I_0 une intensité de référence.
- Décibels : puissance du son $= 10 \log \frac{I}{I_0}$ où I est l'intensité du son mesurée et I_0 une intensité de référence.