Intégration

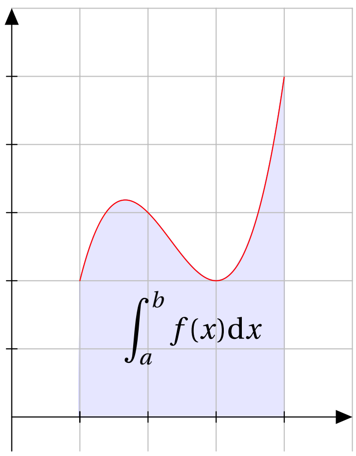
I Intégrale d'une fonction continue positive

Définition 1

Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a;b]$. On appelle intégrale de la fonction f sur l'intervalle $[a;b]$ l'aire, exprimée en unités d'aire, de la surface comprise entre :

– l'axe des abscisses,
– la courbe $\mathscr{C}_f$ représentant la fonction f,
– les droites d'équations $x = a$ et $x = b$.

On la note $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ qui se lit "Intégrale de a à b de $f(x)$ dx".



Remarque : La variable x est souvent remplacée en physique par t. Si $a = b$ alors l'intégrale est nulle.

II Primitives

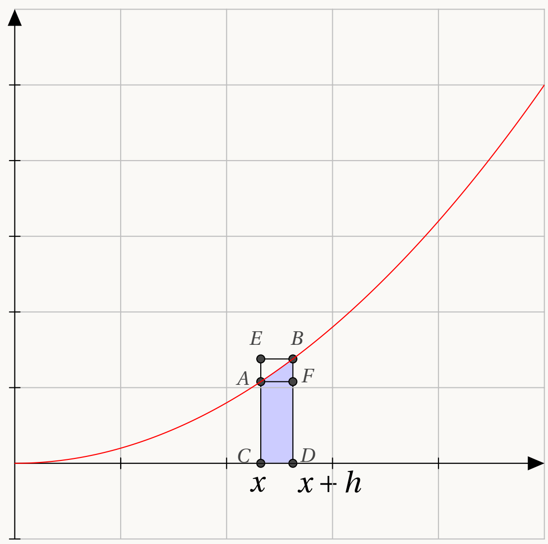
Théorème 1

Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a;b]$. On appelle F la fonction définie sur $[a;b]$ par $F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$.

La fonction F est dérivable sur $[a;b]$ et pour tout $x \in [a;b]$ on a $F'(x) = f(x)$.

Preuve

On démontre ce théorème uniquement pour une fonction f continue, positive et strictement croissante.
Soit h un réel strictement positif.
$F(x+h) = \int_a^{x+h} f(t)\mathrm{d}t$ correspond à l'aire comprise entre l'axe des abscisse et la courbe sur l'intervalle $[a; x+h]$.
Par conséquent $F(x+h) - F(x)$ correspond à l'aire comprise entre l'axe des abscisses et la courbe sur l'intervalle $[x; x+h]$.



L'aire de la partie bleue est donc comprise entre l'aire du rectangle AFDC et celle de EBDC.
Par conséquent $h \times f(x) \leq F(x+h) - F(x) \leq h \times f(x+h)$.
Et $f(x) \leq \dfrac{F(x+h) - F(x)}{h} \leq f(x+h)$.
f est continue donc $\lim\limits_{h \to 0} f(x+h) = f(x)$

En appliquant le théorème des gendarmes, on obtient $F'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{F(x+h) - F(x)}{h} = f(x)$

On procède de la même manière pour h strictement négatif.

F est donc dérivable sur $[a; b]$ et $F'(x) = f(x)$

Définition 2

Soit f une fonction continue sur un intervalle I. On dit qu'une fonction F est une primitive de f sur I si F est dérivable sur I et $F' = f$

Exemple : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 4x^3 - 2$.
Une primitive de f est la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = x^4 - 2x$

Propriété 1

Toute fonction continue sur un intervalle I admet une primitive.

Preuve

On ne va montrer cette propriété que dans le cas où $I = [a; b]$ et f admet un minimum sur I.
On considère la fonction g définie sur I par $g(x) = f(x) - m$.
Cette fonction est continue et positive sur I.
Par conséquent d'après le theorème 1 la fonction g admet une primitive G sur I.
On appelle F la fonction définie sur I par $F(x) = mx + G(x)$.
La fonction F est dérivable sur I comme somme de fonctions dérivables sur I.
$F'(x) = m + G'(x) = m + g(x) = m + f(x) - m = f(x)$
Donc F est une primitive de f sur I.

Propriété 2

Soit f une fonction continue sur un intervalle I. F et G sont des primitives de f sur I si, et seulement si, il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que $G(x) = F(x) + k$ pour tout $x \in I$.

Preuve

Soit F et G deux primitives de f sur I. On définit la fonction H sur I par $H(x) = G(x) - F(x)$.
H est dérivable sur I comme somme de fonctions dérivables.
On a $H'(x) = G'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0$.
La fonction H est donc constante sur I.
Il existe par conséquent un réel k tel que $F(x) = G(x) + k$ pour tout $x \in I$.

Réciproquement, soient un réel k et G la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $G(x) = F(x) + k$.
G est dérivable sur I comme somme de fonctions dérivables sur I.
$G'(x) = F'(x) = f(x)$.
Donc G est un primitive de f sur I.

Exemple : Les fonctions F et G définies sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = x^2$ et $G(x) = x^2 + 5$ sont deux primitives de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x$.

Propriété 3

Soient f une fonction continue sur un intervalle I, x_0 un réel de I et y_0 un réel quelconque. f possède une unique primitive F sur I telle que $F(x_0) = y_0$.

Preuve

f possède une primitive G sur I.
On pose $k = y_0 - G(x_0)$. Alors la fonction F définie sur I par $F(x) = G(x) + k$ est une primitive de f et $F(x_0) = G(x_0) + k = y_0$.
Soit F et G sont deux primitives de f sur I telles que $F(x_0) = G(x_0)$.
Il existe un réel k tel que $F(x) = G(x) + k$ sur I.
En particulier $F(x_0) = G(x_0) + k$ donc $k = 0$.
Il y a donc bien unicité de la primitive de f prenant la valeur y_0 en x_0.

Exemple : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x^2 + 4$. On recherche la primitive de f s'annulant pour $x = 1$.
Les primitives de f sont les fonctions F définies par $F(x) = x^3 + 4x + k$ avec $k \in \mathbb{R}$
On recherche la valeur de k telle que $F(1) = 1 + 4 + k = 0$ donc $k = -5$.

Propriété 4 (Primitives usuelles)

Fonction f	Primitive F	Intervalle
$f(x) = k$	$F(x) = kx$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \frac{1}{x}$	$F(x) = \ln x$	$]0; +\infty[$
$f(x) = x^n$ n entier, $n \neq 0$ et $n \neq -1$	$F(x) = \frac{1}{n+1}x^{n+1}$	$\mathbb{R}$ quand $n > 0$ et $]-\infty; 0[$ ou $]0; +\infty[$ si $n < -1$
$f(x) = \mathrm{e}^x$	$F(x) = \mathrm{e}^x$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$	$F(x) = 2\sqrt{x}$	$]0; +\infty[$
$f(x) = \cos(ax + b)$ $a \neq 0$	$F(x) = \frac{1}{a}\sin(ax + b)$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \sin(ax + b)$ $a \neq 0$	$F(x) = -\frac{1}{a}\cos(ax + b)$	$\mathbb{R}$

Exemple : Une primitive de f définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = x^2 + \frac{1}{x}$ est F définie sur $]0;+\infty[$ par $F(x) = \frac{1}{3}x^3 + \ln x$

Propriété 5

Fonction	Primitive
$ku' \quad k \in \mathbb{R}$	ku
$u'u^n \quad n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\}$ u ne s'annulant pas si $n < 0$	$\frac{1}{n+1}u^{n+1}$
$\frac{u'}{u}$ u strictement positive	$\ln u$
$\frac{u'}{2\sqrt{u}}$ u strictement positive	$\sqrt{u}$
$u'\mathrm{e}^u$	e^u
$u' \sin u$	$-\cos u$
$u' \cos u$	$\sin u$

Exemple : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x + 1}$.

La fonction f est de la forme $\frac{u'}{u}$ avec $u(x) = \mathrm{e}^x + 1$.

Une primitive de f sur $\mathbb{R}$ est la fonction F définie par $F(x) = \ln(\mathrm{e}^x + 1)$.

III Intégrale d'une fonction continue

Propriété 6

Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a;b]$ et soit F une primitive de f sur $[a;b]$.

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$$

Preuve

La fonction G définie sur I par $G(x) = \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ est une primitive de f sur I.
Soit F une primitive de f sur I. Il existe alors un réel k tel que $F(x) = G(x) + k$ pour tout $x \in I$.
On a alors $F(b) - F(a) = G(b) - G(a)$.
Or $G(a) = 0$ et $G(b) = \int_a^b f(t)\mathrm{d}t$.
Par conséquent $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$

Remarque : On note parfois $F(b) - F(a) = [F(x)]_a^b$

Exemple : Si f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 + 3$, une primitive de f est F définie sur $\mathbb{R}$ par
$F(x) = \frac{1}{3}x^3 + 3x$
$\int_1^2 (x^2 + 3)\mathrm{d}x = F(2) - F(1) = \frac{16}{3}$ u.a. (unités d'aire)

Définition 3 (Généralisation)

Soient f une fonction continue sur un intervalle I, F une primitive de f sur I et a et b deux réels de I.
L'intégrale de f sur $[a;b]$ est le nombre $F(b) - F(a)$ noté $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$

Propriété 7 (Opérations)

Soit f une fonction continue sur un intervalle I et a , b et c trois réels de I.

1. $\displaystyle\int_a^a f(x)\mathrm{d}x = 0$
2. $\displaystyle\int_b^a f(x)\mathrm{d}x = -\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$
3. $\displaystyle\int_a^b kf(x)\mathrm{d}x = k\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ pour tout $k \in \mathbb{R}$
4. **Relation de Chasles** $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \int_b^c f(x)\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\mathrm{d}x$
5. Si $a < b$ et $f(x) \geq 0$ sur $[a;b]$ alors $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \geq 0$

Preuve

1. $\displaystyle\int_a^a f(x)\mathrm{d}x = F(a) - F(a) = 0$
2. $\displaystyle\int_b^a f(x)\mathrm{d}x = F(a) - F(b) = -(F(b) - F(a)) = -\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$
3. kF est une primitive de kf donc
   $\displaystyle\int_a^b kf(x)\mathrm{d}x = (kF)(b) - (kF)(a) = k(F(b) - F(a)) = k\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$
4. $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \int_b^c f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a) + F(c) - F(b) = F(c) - F(a) = \int_a^c f(x)\mathrm{d}x$
5. On est revenu à la définition initiale d'une intégrale. L'aire du domaine est positive.

Propriété 8

Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle I et a et b deux réels de I.

1. $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\mathrm{d}x = \int_a^b \big(f(x) + g(x)\big)\,\mathrm{d}x$
2. Si $f(x) \leq g(x)$ sur $[a;b]$ alors $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leq \int_a^b g(x)\mathrm{d}x$

Preuve

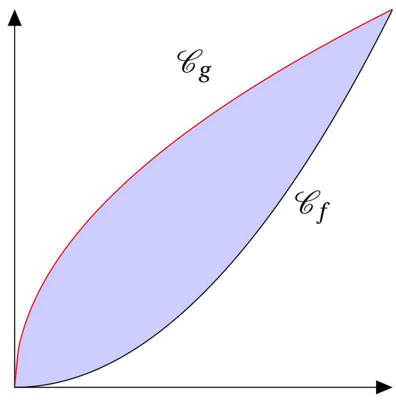
1. $F+G$ est une primitive de $f+g$. Par conséquent

$$\begin{aligned}\int_a^b \big(f(x)+g(x)\big)\,\mathrm{d}x &= F(b)+G(b)-F(a)-G(a)\\ &= F(b)-F(a)+G(b)-G(a)\\ &= \int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\mathrm{d}x\end{aligned}$$

2. Si $f(x \leq g(x)$ sur $[a;b]$ alors $g(x)-f(x) \geq 0$ donc $\int_a^b \big(g(x)-f(x)\big)\,\mathrm{d}x \geq 0$

Propriété 9

Si f et g sont deux fonctions continues et positives sur $[a;b]$ telles que $f(x) \leq g(x)$ alors l'aire, en unités d'aire, comprise entre les deux courbes représentatives des fonctions f et g et les droites d'équations $x=a$ et $x=b$ est égale à $\int_a^b \big(g(x)-f(x)\big)\,\mathrm{d}x$



Définition 4

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a;b]$. On appelle valeur moyenne de la fonction f sur l'intervalle $[a;b]$ le nombre M défini par :

$$M = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

Exemple : On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $3x^2+1$.
La valeur moyenne de f sur $[0;2]$ est :

$$M = \frac{1}{2-0}\int_0^2 \left(3x^2+1\right)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left[x^3+x\right]_0^2 = \frac{10}{2} = 5$$