FONCTION EXPONENTIELLE

On appelle équation différentielle une équation dont l'inconnue est une fonction et où interviennent les dérivées successives de cette fonction. Résoudre une équation différentielle, c'est chercher toutes les fonctions qui vérifient cette équation.

Une donnée supplémentaire du type $y_0 = f(x_0)$ est appelée condition initiale. Dans ce chapitre, on va s'intéresser aux équations différentielles du type : $f'(x) = k * f(x)$, autrement dit : $f' = k * f$.

1) ÉQUATION DIFFERENTIELLE DE LA FORME $f' = f$ AVEC $f(0) = 1$

1.1) Théorème 1

On peut dire que si f est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $f' = f$ et $f(0) = 1$, alors f ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$.

Démontrons ce premier théorème :

Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ vérifiant $f' = f$ et $f(0) = 1$.

Soit g une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = f(x) * f(-x)$.

On peut ainsi dire que $g(0) = 1$ et que g est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Pour tout réel x, on a : $g'(x) = f'(x) * f(-x) - f(x) * f'(-x) = 0$ car $f' = f$.

On en déduit que g est constante sur $\mathbb{R}$.

Ainsi, pour tout x, on a $g(x) = 1$.

Or, comme $g(x) = f(x) * f(-x)$, on en déduit que $f(x) * f(-x) = 1$.

Cette dernière égalité implique que f ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$.

1.2) Théorème 2

On peut dire qu'il existe une unique fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $f' = f$ et $f(0) = 1$.

Démontrons ce deuxième théorème :

On considèrera l'existence admise (voir la méthode d'Euler pour plus d'infos).

Il faut maintenant montrer l'unicité.

On suppose qu'il existe deux fonctions f et g dérivables sur $\mathbb{R}$ telles que $f' = f$, $g' = g$, $f(0) = 1$ et $g(0) = 1$.

On considère la fonction $h(x) = \frac{g(x)}{f(x)}$.

On peut dire que h est dérivable sur $\mathbb{R}$ (car quotient de fonctions dérivables).

Ainsi, on a : $h(0) = 1$ et $h'(x) = 0$ pour tout réel x.

On peut donc dire que h est constante sur $\mathbb{R}$.

Et pour tout réel x, $h(x) = 1$ donc $\frac{g(x)}{f(x)} = 1$.

Cela implique donc que $f = g$.

Il y a donc bien une unique fonction et la démonstration est terminée.

1.3) Définition

On appelle fonction exponentielle l'unique fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ qui vérifie $f' = f$ et $f(0) = 1$. De plus, on la note $\exp(x)$.

Autrement dit, on a :

- $\exp(x)$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$
- $(\exp(x))' = \exp(x)$
- $\exp(0) = 1$

- $\exp(x) \neq 0$ pour tout réel x
- $\exp(x) * \exp(-x) = 1$ pour tout réel x
- $\exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}$ pour tout réel x

2) PROPRIETES ALGEBRIQUES DE LA FONCTION EXPONENTIELLE

2.1) Propriété fondamentale

Pour tous réels a et b, on a la propriété fondamentale suivante :

$$\exp(a+b) = \exp(a) * \exp(b)$$

Démontrons cette propriété fondamentale :

On pose $g(x) = \exp(\mathrm{a} + \mathrm{b} - \mathrm{x}) * \exp(\mathrm{x})$.

Cette fonction g est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

Pour tout réel x, $g'(x) = -\exp(a+b-x) * \exp(x) + \exp(a+b-x) * \exp(x) = 0$.

Donc g est constante sur $\mathbb{R}$.

De plus, $g(0) = \exp(a+b)$ et $g(b) = \exp(a) * \exp(b)$.

Comme g est constante sur $\mathbb{R}$, on a $g(0) = g(b)$.

On en déduit donc bien l'égalité suivante : $\exp(a+b) = \exp(a) * \exp(b)$.

2.2) Conséquences

On observe ainsi plusieurs conséquences de cette propriété fondamentale :

- Soient a et b deux réels. Alors on a :

$$\exp(a-b) = \exp(-b+a) = \exp(a) * \exp(-b) = \exp(a) * \frac{1}{\exp(b)}$$

Donc on en déduit :

$$\exp(a-b)=\frac{\exp(a)}{\exp(b)}$$

- Soient n réels $x_1, x_2, \dots, x_n$.
  Alors on a :
  - $\exp(x_1+x_2)=\exp(x_1)*\exp(x_2)$
  - $\exp(\sum_{i=1}^{n} x_i)=\prod_{i=1}^{n}\exp(x_i)$

  Si les x_i sont tous égaux à x, alors on en déduit, pour tout entier $n \in \mathbb{Z}$:

$$\exp(n*x)=(\exp(x))^n$$

- Pour tout réel x, on a : $x=\frac{x}{2}+\frac{x}{2}$, d'où :

$$\exp(x)=\exp\left(\frac{x}{2}+\frac{x}{2}\right)=\exp\left(\frac{x}{2}\right)^2$$

  Comme $\exp(x)>0$ pour tout réel x, on en déduit :

$$\exp\left(\frac{x}{2}\right)=\sqrt{\exp(x)}=(\exp(x))^{\frac{1}{2}}$$

2.3) Nouvelle notation

On a : $\exp(n*x)=(\exp(x))^n$ et pour $x=1$, $\exp(n)=(\exp(1))^n$.

On va donc noter :

$$\exp(1)=e$$

Avec :

$$e\cong 2{,}718$$

Soit $\exp(n)=e^n$.

Par convention, on pose donc :

$$\exp(x)=e^x$$

On obtient ainsi les propositions suivantes :

- $(e^x)'=e^x$

- $e^{n*x} = (e^x)^n$
- $e^{a+b} = e^a * e^b$
- $e^{a-b} = \frac{e^a}{e^b}$
- $e^0 = 1$
- $e^1 = e$
- $e^{-x} = \frac{1}{e^x}$
- $e^x > 0$ pour tout réel x
- $e^x * e^{-x} = 1$
- $\sqrt{e^x} = e^{\frac{x}{2}} = (e^x)^{\frac{1}{2}}$

3) Representation graphique

D'après tout ce qu'on a vu précédemment, on peut dire que :

- $\exp(x)$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ car sa dérivée est positive
- $e^a > e^b \Leftrightarrow a > b$
- $e^a = e^b \Leftrightarrow a = b$
- $e^x \geq 1 \Leftrightarrow x \geq 0$
- $0 < e^x \leq 1 \Leftrightarrow x \leq 0$

3.1) Limites aux bornes

Les deux bornes en question sont : $+\infty$ et $-\infty$.

On a la première limite suivante :

$$\lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty$$

Démontrons cette première limite :

Pour tout x positif, on pose $g(x) = \exp(x) - x$.

Cette fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ avec : $g'(x) = e^x - 1 \geq 0$.

Ainsi, g est croissante sur $\mathbb{R}^+$.

Or, $g(0) = 1$.

Donc pour tout x de $\mathbb{R}^+$, $g(x) > 0$.

On en déduit que $e^x \geq x$.

Donc on a bien la limite énoncée ci-dessus.

On a la deuxième limite suivante :

$$\lim_{x \to -\infty} e^x = 0$$

Démontrons cette deuxième limite :

On effectue ici un changement de variable.

On pose : $X = -x$, et on obtient :

$$\lim_{x \to -\infty} e^x = \lim_{X \to +\infty} e^{-X} = \lim_{X \to +\infty} \frac{1}{e^X} = 0$$

On a donc bien démontré la deuxième limite.

On peut déduire d'après cette deuxième limite que la courbe de la fonction $\exp(x)$ admet une asymptote horizontale d'équation $y = 0$.

3.2) Équations de tangentes

On peut établir deux équations importantes :

- tangente au point d'abscisse 0 :

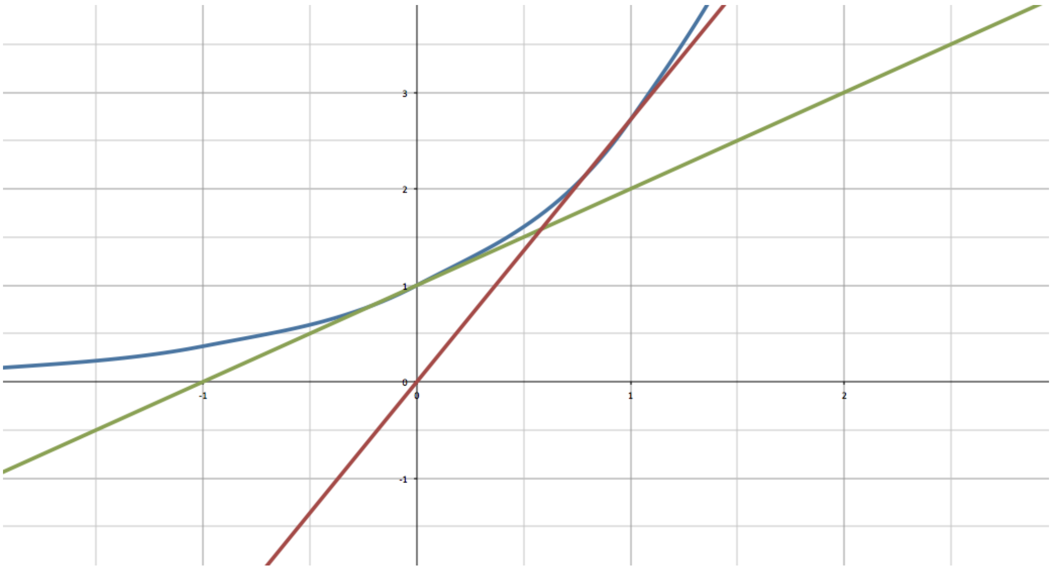
$$y = f(0) + f^{'}(0) * (x - 0)$$
$$y = x + 1$$

- tangente au point d'abscisse 1 :

$$y = f(1) + f'(1) * (x - 1)$$

$$y = e * x$$

On obtient ainsi le graphique suivant, avec en bleu la courbe de la fonction exponentielle, en vert la tangente au point d'abscisse 0 et en rouge celle au point d'abscisse 1 :



3.3) Autres limites à connaître

Il y a quelques autres limites concernant la fonction exponentielle qu'il faut connaître :

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

Démontrons cette première limite :

On reconnaît ici qu'on a un taux de variation : $\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$.

Dans notre cas, $f(x) = \exp(x)$ et $a = 0$.

On applique la définition du taux de variation et on obtient bien 1.

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$$

Démontrons cette deuxième limite :

On pose $h(x) = e^x - \frac{x^2}{2}$.

Cette fonction est dérivable sur $\mathbb{R}$, avec $h^{'}(x) = e^x - x$.

Or, $h(0) = 1$ et h est croissante sur $\mathbb{R}^+$.

Ainsi on en déduit que $h(x) \geq 0$ pour tout x de $\mathbb{R}^+$.

Donc on a : $e^x \geq \frac{x^2}{2}$ pour tout x de $\mathbb{R}^+$.

Cela implique donc : $\frac{e^x}{x} \geq \frac{x}{2}$ pour tout x de $\mathbb{R}^+$.

On obtient bien la limite énoncée plus haut.

$$\lim_{x \to -\infty} x * e^x = 0$$

Démontrons cette troisième limite :

On effectue un changement de variable en posant $X = -x$.

On obtient ainsi :

$$\lim_{x \to -\infty} x * e^x = \lim_{X \to +\infty} -X * e^{-X} = \lim_{X \to +\infty} -\frac{X}{e^X} = \lim_{X \to +\infty} -\frac{1}{\frac{e^X}{X}} = 0$$

La démonstration est bien terminée.

3.4) Dérivée d'une fonction avec exponentielle

Soit u une fonction définie et dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

Alors on peut dire que e^u est dérivable sur I et on a : $(e^u)' = u^{'} * e^u$.

Prenons quelques exemples pour illustrer les propos précédents :

- $f(x) = e^{3*x}$ implique : $f^{'}(x) = 3 * e^{3*x}$
- $g(x) = e^{x^2-5*x+1}$ implique : $g^{'}(x) = (2 * x - 5) * e^{x^2-5*x+1}$
- $h(x) = e^{\frac{1}{x}}$ implique : $h^{'}(x) = -\frac{1}{x^2} * e^{\frac{1}{x}}$