AMÉRIQUE DU NORD MAI 2019

MATHÉMATIQUES TS OBLIGATOIRE

Exercice 1

Partie A

1. **a.** On veut calculer $P(1,35 \leqslant X \leqslant 1,65)$.
   D'après la calculatrice on trouve $P(1,35 \leqslant X \leqslant 1,65) \approx 0,968$.

   REMARQUE :

   Attention, sur certaines calculatrices, à l'ordre dans lequel tu rentres les différents paramètres.

   b. La variable $Z = \dfrac{X_1 - 1,5}{\sigma_1}$ suit la loi normale centrée réduite.
   On a

$$\begin{aligned}
P(1,35 \leqslant X_1 \leqslant 1,65) = 0,98 &\Leftrightarrow P(-0,15 \leqslant X_1 - 1,5 \leqslant 0,15) = 0,98\\
&\Leftrightarrow P\left(-\frac{0,15}{\sigma_1} \leqslant \frac{X_1 - 1,5}{\sigma_1} \leqslant \frac{0,15}{\sigma_1}\right) = 0,98\\
&\Leftrightarrow P\left(-\frac{0,15}{\sigma_1} \leqslant Z \leqslant \frac{0,15}{\sigma_1}\right) = 0,98\\
&\Leftrightarrow 2P\left(Z \leqslant \frac{0,15}{\sigma_1}\right) - 1 = 0,98 \quad \text{(propriété du cours)}\\
&\Leftrightarrow 2P\left(Z \leqslant \frac{0,15}{\sigma_1}\right) = 1,98\\
&\Leftrightarrow P\left(Z \leqslant \frac{0,15}{\sigma_1}\right) = 0,99
\end{aligned}$$

   À l'aide de la touche *Inverse loi normale* de la calculatrice, on trouve $\dfrac{0,15}{\sigma_1} \approx 2,326$ et donc $\sigma_1 \approx 0,064$.

2. **a.** On a $n = 250$ et $p = 0,02$.

Donc $n \geqslant 30$, $np = 5 \geqslant 5$ et $n(1-p) = 245 \geqslant 5$.

Un intervalle de fluctuation asymptotique à 95% de la fréquence des tubes non « conformes pour la longueur » est :

$$\begin{aligned} I_{250} &= \left[0,02 - 1,96\sqrt{\frac{0,02 \times 0,98}{250}} ; 0,02 + 1,96\sqrt{\frac{0,02 \times 0,98}{250}}\right] \\ &\approx [0,002 ; 0,038] \end{aligned}$$

REMARQUE :

Il faut bien penser, avant d'utiliser la formule concernant les intervalles de fluctuation asymptotiques vue cette année de vérifier que les conditions d'application sont vérifiées.

b. La fréquence observée est $f = \dfrac{10}{250} = 0,04 \notin I_{250}$.

Au risque d'erreur de 5%, il faut réviser la machine.

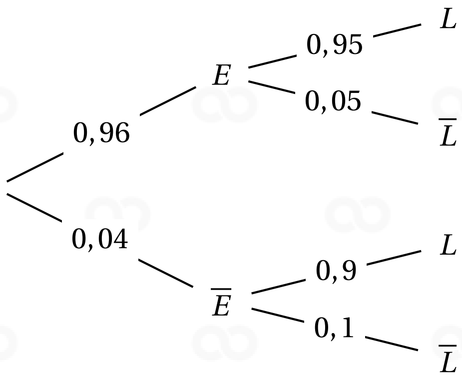
Partie B

1. On a $P\left(\overline{E} \cap L\right) = 0,036$ et $P\left(\overline{E} \cap L\right) = 0,04 P_{\overline{E}}(L)$.

Par conséquent $P_{\overline{E}}(L) = \dfrac{0,036}{0,04} = 0,9$.

Donc $P_{\overline{E}}\left(\overline{L}\right) = 1 - 0,9 = 0,1$.

On obtient l'arbre pondéré suivant :



2. D'après la formule des probabilités totales on a :

$$\begin{aligned} P(L) &= P(E \cap L) + P\left(\overline{E} \cap L\right) \\ &= 0,96 \times 0,95 + 0,036 \\ &= 0,948 \end{aligned}$$

Exercice 2

Affirmation 1 fausse

$$\begin{aligned} z - \mathrm{i} = i(z+1) &\Leftrightarrow z - \mathrm{i} = \mathrm{i}z + \mathrm{i} \\ &\Leftrightarrow z - \mathrm{i}z = 2\mathrm{i} \\ &\Leftrightarrow z(1-\mathrm{i}) = 2\mathrm{i} \\ &\Leftrightarrow z = \frac{2\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}} \end{aligned}$$

Or $2\mathrm{i} = 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/2}$

De plus $|1-\mathrm{i}| = \sqrt{2}$ donc $|1-\mathrm{i}| = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/4}$

Par conséquent :

$$\begin{aligned} z - \mathrm{i} = i(z+1) &\Leftrightarrow z = \frac{2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/2}}{\sqrt{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/4}} \\ &\Leftrightarrow = \sqrt{2}\mathrm{e}^{3\mathrm{i}\pi/4} \end{aligned}$$

Or $\sqrt{2}\mathrm{e}^{3\mathrm{i}\pi/4} \neq \sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/4}$.

REMARQUE :

On pouvait également utiliser la forme algébrique du nombre fourni et tester si les deux membres de l'équation étaient égaux.

Affirmation 2 fausse

Pour tout réel $x \in \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$ on a :

$$\begin{aligned} 2\cos x\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x} &= 2 \times \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}}{2} \times \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x} \\ &= 1 + \mathrm{e}^{-2\mathrm{i}x} \\ &\neq 1 + \mathrm{e}^{2\mathrm{i}x} \quad \text{sauf si } x = 0 \end{aligned}$$

REMARQUE :

Pour transformer l'expression du cosinus, on a utilisé la formule d'Euler:

$$\cos x = \frac{e^{ix} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}}{2} \quad \text{et} \quad \sin x = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}}{2\mathrm{i}}$$

Affirmation 3 vraie

On appelle A le point d'affixe i et B le point d'affixe -1.
Ainsi : $|z-\mathrm{i}| = |z+1| \Leftrightarrow AM = BM$
Le point M appartient donc à la médiatrice du segment $[AB]$.
On appelle C le point d'affixe $z_C = -1+\mathrm{i}$.

Ainsi $|z_C - \mathrm{i}| = |-1| = 1$ et $|z_C + 1| = |\mathrm{i}| = 1$
Ainsi C appartient à cette médiatrice.
De plus si $z = 0$ alors $|0 - \mathrm{i}| = |ic| = 1$ et $|0 + 1| = 1$.
Le point O appartient également à cette médiatrice.
La médiatrice est donc la droite (OC) dont une équation est $y = -x$.

REMARQUE :

Dans ce genre de question, il est souvent utile de se ramener à un problème géométrique et donc de faire intervenir des points dont on connait les affixes.

Affirmation 4 fausse
Supposons que l'équation $z^5 + z - \mathrm{i} + 1 = 0$ possède une solution réelle a.
On a alors $a^5 + a + 1 = \mathrm{i}$.
Or $a^5 + a + 1$ est un réel et i est un imaginaire pur non nul.
Cela signifie que i est à la fois un réel et un imaginaire pur; ce qui est absurde.
La supposition faite est donc fausse.

REMARQUE :

Il parait difficile d'essayer de résoudre directement l'équation fournie; c'est pourquoi un raisonnement par l'absurde semble être la meilleure option.

Exercice 3

Partie A : établir une inégalité

1. La fonction f est dérivable sur l'intervalle $[0;+\infty[$ en tant que somme de fonctions dérivables sur cet intervalle.

   Pour tout réel $x \in [0;+\infty[$ on a :
   $f'(x) = 1 - \dfrac{1}{x+1} = \dfrac{x+1-1}{x+1} = \dfrac{x}{x+1}$
   Sur l'intervalle $[0;+\infty[$ on a $x \geqslant 0$ et $x+1 > 0$.

   Par conséquent $f(x) \geqslant 0$ et la fonction f est strictement croissante sur cet intervalle.

   REMARQUE :

   Attention à la formule utilisée quand on dérive une fonction du type $\ln(u)$ on a $(\ln(u))\prime = \dfrac{u'}{u}$ quand toutes les hypothèses de dérivations sont vérifiées.

2. De plus $f(0) = 0 - \ln(1) = 0$.

   Pour tout réel $x \in [0;+\infty[$ on a, d'après la question précédente : $0 = f(0) \leqslant f(x)$

   Donc $0 \leqslant x - \ln(x+1) \Leftrightarrow \ln(x+1) \leqslant x$.

   REMARQUE :

   On utilise ici la croissance de la fonction f démontrée à la question précédente.

Partie B : application à l'étude d'une suite

1. On a $u_1 = 1 - \ln(2)$ et $u_2 = 1 - \ln(2) - \ln(2 - \ln(2)) \approx 0,039$.

2. **a.** **Initialisation :** Si $n = 0$ alors $u_0 = 1 \geqslant 0$.
   La propriété est vraie au rang 0.

   Hérédité : On suppose la propriété vraie au rang n, donc $u_n \geqslant 0$.
   Montrons que la propriété est encore vraie au rang $n+1$, c'est-à-dire que $u_n - \ln(1+u_n) \geqslant 0$.
   On a $u_{n+1} = f(u_n)$.
   D'après la question **A.2.** on sait que pour tout réel x on a $f(x) \geqslant 0$.
   Puisque $u_n \geqslant 0$ on a donc $f(u_n) \geqslant 0$.
   La propriété est ainsi vraie au rang $n+1$.

   Conclusion : la propriété est vraie au rang 0 et est héréditaire.
   Ainsi, pour tout entier naturel n, on a $u_n \geqslant 0$.

   REMARQUE :

   Il faut être rigoureux quand on mène un raisonnement par récurrence.

   b. Pour tout entier naturel n on a : $u_{n+1} - u_n = -\ln(1+u_n)$
   D'après la question précédente on a $u_n \geqslant 0$ donc $1 + u_n \geqslant 1$ et $\ln(1+u_n) \geqslant 0$.
   Ainsi $u_{n+1} - u_n \leqslant 0$ et la suite (u_n) est décroissante.

REMARQUE :

On utilise ici le fait que $\ln(x) \geqslant 0 \Leftrightarrow x \geqslant 1$.

La suite (u_n) étant décroissante et $u_0 = 1$ on a donc, pour tout entier naturel n, $u_n \leqslant u_0$ soit $u_n \leqslant 1$.

c. La suite (u_n) est décroissante et minorée par 0; elle est donc convergente.

3. La limite ℓ est solution de l'équation :

$$\begin{aligned} f(x) = x \Leftrightarrow x - \ln(1+x) = x \\ \Leftrightarrow -\ln(1+x) = 0 \\ \Leftrightarrow 1 + x = 1 \\ \Leftrightarrow x = 0 \end{aligned}$$

Par conséquent $\ell = 0$.

4. a. On peut écrire l'algorithme suivant :

```
U ← 1
N ← 0
Tant que U ⩾ 10^(-p)
        U ← U − ln(1 + U)
        N ← N + 1
Fin tant que
```

b. On a $u_5 \approx 3,96 \times 10^{-14}$ et $u_6 \approx 4,942 \times 10^{-17}$.

Puisque la suite (u_n) est décroissante, cela signifie que qu'à partir du rang 6 on a $u_n \leqslant 10^{-15}$.

REMARQUE :

Il est possible que ta calculatrice ne te permette pas de répondre correctement à la question. On arrive effectivement aux limites des représentations des nombres par celle-ci et elles sont nombreuses à afficher des valeurs incohérentes avec le problème avant le rang 6.

Exercice 4
Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

1. Les plans (ABC) et (KLM) sont parallèles.

   Les droites (IN) et (AE) sont parallèles et la droite (AE) est perpendiculaire au plan (ABC).

   La droite (IN) est par conséquent perpendiculaire au plan (KLM).

   Elle est donc orthogonale à toutes les droites de ce plan, en particulier à la droite (ML).

1. On a $N(0,5;0,5;1)$ et $C(1;1;0)$. Le vecteur $\overrightarrow{NC}$ a donc pour coordonnées $(0,5;0,5;-1)$.

2. On a $M(0,5;0;0,5)$ et $L(0;0,5;0,5)$. Le vecteur $\overrightarrow{ML}$ a donc pour coordonnées $(-0,5;0,5;0)$.

3. On a $\overrightarrow{NC}.\overrightarrow{ML} = -0,25+0,25+0=0$.

   Par conséquent les vecteurs $\overrightarrow{NC}$ et $\overrightarrow{ML}$ sont orthogonaux et les droites (NC) et (ML) sont orthogonales.

   REMARQUE :

   On utilise la propriété du cours : si $\vec{u}(x,y)$ et $\vec{v}\left(x',y'\right)$ alors $\vec{u}.\vec{v} = xx'+yy'$.

   De plus, deux vecteurs sont orthogonaux si, et seulement si, leur produit scalaire est nul.

4. Le vecteur $\overrightarrow{ML}$ est donc aux vecteurs $\overrightarrow{IN}$ et $\overrightarrow{NC}$ qui sont deux vecteurs non colinéaires du plan (NCI).

   Une équation cartésienne de ce plan est alors de la forme $-0,5x+0,5y+d=0$.

   Or $C(1;1;0)$ appartient à ce plan.

   Par conséquent $0+0+d=0 \Leftrightarrow d=0$.

   Une équation cartésienne du plan (NCI) est donc $-0,5x+0,5y=0$.

   REMARQUE :

   Si $\vec{n}(a,b,c)$ est un vecteur normal d'un plan $\mathscr{P}$ alors une équation cartésienne de ce plan est de la forme $ax+by+cz+d=0$.

5. **a.** On a :

   $N(0,5;0,5;1)$ donc $0,5-0,5+1=0+1=1\checkmark$

   $M(0,5;0;0,5)$ donc $0,5-0+0,5=1\checkmark$

   $J(1;0,5;0,5)$ donc $1-0,5+0,5=1+0=1\checkmark$

   Les coordonnées de ces trois points vérifient l'équation $x-y+z=1$.

   Ainsi une équation cartésienne du plan (NJM) est bien $x-y+z=1$.

   REMARQUE :

   On nous fournit une équation cartésienne du plan. Il nous suffit donc de vérifier que les coordonnées des trois points N, M et J vérifient cette équation pour montrer qu'elle convient.

b. Un vecteur normal au plan (NJM) est donc $\vec{n}(1;-1;1)$.

On a $D(0;1;0)$ et $F(1;0;1)$ donc $\overrightarrow{DF}\,(1;-1;1)$

Ainsi $\vec{n}$ et $\overrightarrow{DF}$ sont colinéaires et la droite (DF) est perpendiculaire au plan (NIM).

REMARQUE :

Tout vecteur colinéaire à un vecteur normal d'un plan est également un vecteur normal à ce plan.

c. On veut résoudre le système suivant : $\begin{cases} x-y+z=1 \\ -0,5x+0,5y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=y \\ x-y+z=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=y \\ z=1 \end{cases}$

L'intersection des deux plans (NJM) et (NCI) est donc la droite dont une représentation paramétrique est $\begin{cases} x=t \\ y=t \\ z=1 \end{cases}, t \in \mathbb{R}$.

Cette droite passe donc par le point de coordonnées $(0;0;1)$ et a pour vecteur directeur le vecteur $\vec{u}(1;1;0)$.

Le point N appartient à ces deux plans et le point E a pour coordonnées $(0;0;1)$.

L'intersection des deux plans est donc la droite (NE).