NOTION DE LOI À DENSITÉ

Dire qu'une loi est à densité c'est dire qu'il s'agit d'une loi continue.

I. DÉFINITION D'UNE DENSITÉ DE PROBABILITÉ

Soit I un intervalle. On appelle densité de probabilité sur I toute fonction f continue et positive sur I telle que :

$$\int_I f(t)\,\mathrm{d}t = 1$$

Selon I on a :

A. I est un intervalle définit tel que I = [a ; b] alors on a :

$$\int_I f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$$

B. I est défini comme un intervalle non borné (par exemple [a ;+∞[ ) alors on travaille avec la limite :

$$\int_I f(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{x \to +\infty} \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

C. I est défini sur un ensemble (par exemple sur R), on a I=R, alors on définit la densité comme étant la somme des deux limites :

$$\int_I f(t)\,dt = \lim_{x\to-\infty}\int_x^0 f(t)\,dt + \lim_{x\to+\infty}\int_0^x f(t)\,dt$$

Exemples / Exercice :

Déterminer un réel α de façon que la fonction f définie sur [0, 1] par

f(x) = 2x + α soit une densité de probabilité sur [0, 1].

On cherche α tel que :

$$\int_0^1 (2x+\alpha)\,dx = 1$$

$$\left[x^2 + \alpha x\right]_0^1 = 1$$

$$1 + \alpha = 1$$

$$\alpha = 1$$

II. DÉFINITION LOI DE PROBABILITÉ

Soit I un intervalle et f une densité de probabilité sur I. L'application P qui, à tout sous-intervalle [a, b] de I associe la quantité :

$$P([a, b]) = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$$

est appelée loi de probabilité sur I.

Remarque :

Cette définition vérifie bien que la probabilité de l'espace tout entier (Ici l'intervalle tout entier I) vaut P(I)=1.

Remarque :

- Puisque [a, b] est inclus dans I et que f est positive sur I, on bien P([a, b]) ϵ [0, 1].
- La probabilité d'un singleton (ou intervalle réduit à un point) est nulle. En effet :

$$P(\{x_0\}) = \int_{x_0}^{x_0} f(t)\,\mathrm{d}t = 0$$

- La définition convient à des intervalles non bornés dans le cas ou la limite de l'intégrale existe.

III. Variables aléatoires continues

Les variables aléatoires qui prennent leurs valeurs dans un intervalle I sont dites des variables aléatoires « continues ».

Définition :

Soit P une loi de probabilité sur un intervalle I de densité f. La variable aléatoire X qui prend ses valeurs dans l'intervalle I suit une loi de probabilité P lorsque pour tous sous intervalle [a ; b] contenus dans I on a :

$$P(a \leqslant X \leqslant b) = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$$

1. La loi Uniforme

On définit la loi Uniforme sur un intervalle [a ; b] :

$$P(\alpha \leqslant X \leqslant \beta) = \int_\alpha^\beta \frac{1}{b-a}\,\mathrm{d}t = \frac{\beta-\alpha}{b-a}$$

On a donc f une constante sur [a ; b] valant 1/(b-a).

Exemple/Exercice :

Dans la journée le bus passe toutes le 8 minutes en bas de l'immeuble de Marion. Soit X le temps d'attente de pauline à cette station. On suppose que X suit la loi uniforme sur [0 ; 8]. Quelle est la probabilité que pauline attende entre 1 et 3 minutes sont bus ?

$$P(1 \leqslant X \leqslant 3) = \frac{3-1}{8-0} = \frac{1}{4}$$

2. La loi exponentielle

On définit la loi Exponentielle de paramètre λ>0 sur R+.

$$P(0 \leqslant X \leqslant x) = \int_0^x \lambda \mathrm{e}^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda x}$$

On a f de la forme : $f(t) = \lambda \mathrm{e}^{-\lambda t}$ de paramètre λ sur R+.

Exemple/Exercice :

On suppose que la durée de vie d'un ordinateur suit une loi exponentielle de paramètre 0.1. On veut calculer la probabilité que l'ordinateur de Mathilde dépasse 10ans de durée de vie.

IV. Fonction de répartition

Définition

Soit X une variable aléatoire, à valeurs dans un intervalle I de la forme [a, b] (ou de la forme [a, +∞[), qui suit une loi de probabilité P.

On appelle fonction de répartition de X, la fonction F définie pour tout réel x de I par :

$$F(x) = P(X \leqslant x)$$

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

On remarque donc que la dérivée de la fonction de répartition de X n'est autre que le densité de X.

Propriétés

F est croissante sur [a, x] (puisque sa dérivée ¦, qui est une densité, est positive sur I)

- F(a) = 0

- $F(b) = 1$ (si $I = [a, b]$)
- $P(X > x) = 1 - F(x)$
- $P(a < X < b) = F(b) - F(a)$