PROBABILITÉS CONDITIONNELLES

I Probabilité conditionnelle

Définition 1

Soit A et B deux événements tels que $p(A)$ soit non nul. La probabilité de B sachant que l'événement A s'est réalisé est le nombre

$$p_A(B) = \frac{p(A \cap B)}{p(A)}$$

Exemple : Dans un jeu de 52 cartes, on a tiré une carte rouge. On voudrait déterminer la probabilité que cette carte soit un cœur.
On appelle

— R l'événement "la carte tirée est rouge".
— C l'événement "la carte tirée est un cœur".

On cherche alors $p_R(C) = \dfrac{p(R \cap C)}{p(R)} = \dfrac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{2}$

Propriété 1

Soit A et B deux événements tels que $p(A)$ soit non nul.

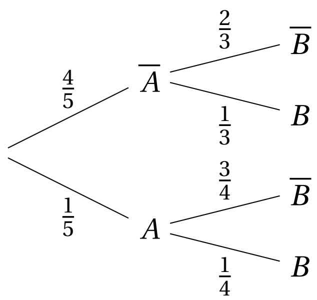
1. $0 \leq p_A(B) \leq 1$
2. $p_A(B) + p_A\left(\overline{B}\right) = p_A(A) = 1$
3. $p_A(\emptyset) = 0$
4. $p(A \cap B) = p_A(B) \times p(A) = p_B(A) \times p(B)$ (avec $p(B) \neq 0$ pour la deuxième égalité)

Preuve

1. $p_A(B)$ est un quotient de nombres positifs. Donc $p_A(B) \geq 0$.
   De plus l'événement $A \cap B$ est inclus dans A donc $p(A \cap B) \leq p(A)$. Par conséquent $p_A(B) \leq 1$.
2. $p_A(B) + p_A\left(\overline{B}\right) = \dfrac{p(A \cap B)}{p(A)} + \dfrac{p\left(A \cap \overline{B}\right)}{p(A)} = \dfrac{p(A \cap B) + p\left(A \cap \overline{B}\right)}{p(A)} = \dfrac{p(A)}{p(A)} = 1 = p_A(A)$
3. $p(A \cap \varnothing) = 0$ donc $\dfrac{p(A \cap \varnothing)}{p(A)} = 0$
4. $p_A(B) = \dfrac{p(A \cap B)}{p(A)}$ donc $p(A \cap B) = p(A) \times p_A(B)$
   On a de même, si $p(B) \neq 0$, $p_B(A) = \dfrac{p(A \cap B)}{p(B)}$ donc $p(A \cap B) = p(B) \times p_B(A)$

II Arbres pondérés

Exemple :



Propriété 2

Dans un arbre pondéré, si B est l'extrémité d'une branche de second niveau issue d'une branche A, alors la probabilité indiquée sur la branche liant A à B est $p_A(B)$

Exemple : Sur l'arbre précédent, on a donc $p_A(B) = \dfrac{1}{4}$.

Propriété 3

La somme des probabilités des branches issues d'un même nœud est égale à 1.

Exemple : Sur l'arbre précédent, on vérifie que : $\frac{1}{5}+\frac{4}{5}=1 \qquad \frac{1}{3}+\frac{2}{3}=1 \quad$ et $\quad \frac{1}{4}+\frac{3}{4}=1$

Propriété 4

La probabilité d'un chemin est le produit des probabilités des branches qui composent ce chemin.

Exemple : Sur l'arbre précédent, $p\left(A\cap\overline{B}\right)=\frac{1}{5}\times\frac{3}{4}=\frac{3}{20}$

III Probabilités totales

Définition 2

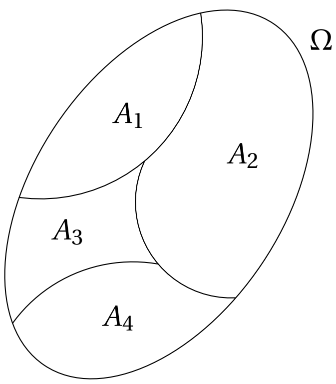
Deux évévenements sont incompatibles si leur intersection est vide.

Exemple : On considère un jeu de 32 cartes. Les événements A : "Tirer un roi" et B : "Tirer un as sont incompatibles.

Définition 3

Soit n un entier naturel. On dit que les événements $A_1, A_2, \ldots, A_n$ forment une partition de l(univers Ω si :

— $\forall i\in\{1,2\ldots,n\}\ \ p(A_i)\neq 0$
— ils sont tous disjoints deux à deux
— leur réunion est l'univers Ω



Propriété 5 (Probabilités totales)

Soient $A_1, A_2, \dots, A_n$ une partition de l'unité et B un événement. On a :

$$\begin{aligned} p(B) &= p(A_1 \cap B) + p(A_2 \cap B) + \dots p(A_n \cap B) \\ &= p_{A_1}(B)p(A_1) + p_{A_2}(B)p(A_2) + \dots + p_{A_n}(B)p(A_n) \end{aligned}$$

Propriété 6 (cas $n = 2$)

Soit A et B deux événements tels que $0 < p(A) < 1$.

$$p(B) = p\left(\overline{A} \cap B\right) + p(A \cap B) = p_{\overline{A}}(B)p\left(\overline{A}\right) + p_A(B)p(A)$$

Exemple : En reprenant l'arbre, on a :

$$\begin{aligned} p(B) &= p\left(\overline{A} \cap B\right) + p(A \cap B) \\ &= \frac{4}{5} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{5} \times \frac{1}{4} \\ &= \frac{19}{60} \end{aligned}$$

IV Indépendance

Définition 4

Deux événements A et B sont indépendants si $p(A \cap B) = p(A) \times p(B)$.
Les deux événements de produisent indépendamment l'un de l'autre.

Exemple : On tire une carte d'un jeu de 32 cartes.
On appelle :
- A : "la carte tirée est un as"
- T : "la carte tirée est un trèfle"

Il y a 4 as dans le jeu, par conséquent $p(A) = \frac{4}{32} = \frac{1}{8}$.

Les trèfles représentent un quart des cartes donc $p(T) = \frac{1}{4}$.

On a un seul as de trèfle, donc $p(T \cap A) = \frac{1}{32}$

Or $p(T) \times p(A) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{8} = \frac{1}{32} = p(T \cap A)$. Les événements A et T sont donc indépendants.

Remarques :

- Un événement A de probabilité nulle et un événement B quelconque sont toujours indépendants. En effet, $p(A \cap B) = 0$ et $p(A) \times p(B) = 0$
- Un événement certain A et un événement B quelconque sont toujours indépendants. En effet, $p(A \cap B) = p(B)$ et $p(A) \times p(B) = p(B)$

Propriété 7

Si A et B sont indépendants alors A et $\overline{B}$ le sont aussi.

Preuve

On suppose que $0 < p(A) < 1$ et $0 < p(B) < 1$.
On a, d'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} p(A) &= p(A \cap B) + p\left(A \cap \overline{B}\right) \\ &= p(A) \times p(B) + p\left(A \cap \overline{B}\right) \end{aligned}$$

Donc $p\left(A \cap \overline{B}\right) = p(A) \times \left(1 - p(B)\right) = p(A) \times p\left(\overline{B}\right)$

Propriété 8

Soit A et B deux événements de probabilité non nulle.
A et B sont indépendants $\Leftrightarrow p_A(B) = p(B) \Leftrightarrow p_B(A) = p(A)$

Preuve

$$\begin{aligned} A \text{ et } B \text{ sont indépendants} &\Leftrightarrow p(A \cap B) = p(A) \times p(B) \\ &\Leftrightarrow p_A(B) \times p(A) = p(A) \times p(B) \\ &\Leftrightarrow p_A(B) = p(B) \end{aligned}$$

On a la même démonstration pour $p_B(A) = p(A)$.

Définition 5

Soit X et Y deux variables aléatoires définies sur un univers Ω.
On désigne par $x_1, x_2, \ldots, x_n$ et $y_1, y_2, \ldots, y_p$ les valeurs prises respectivement par X et Y.
On dit que les variables aléatoires Xet Y sont indépendantes quand, pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$ et tout $j \in \{1, \ldots, p\}$ les événements $(X = x_i)$ et $(Y = y_j)$ sont indépendants.