# Amérique du Nord mai 2018

# Mathématiques TS spécialité

**Exercice 1**

**Partie A - Démonstration préliminaire**

1. La fonction $G$ est dérivable sur l'intervalle $[0;+\infty[$ comme produit de fonctions dérivables sur cet intervalle.

$$\begin{aligned} G'(t) &= -\mathrm{e}^{-0,2t} - 0,2(-t-5)\mathrm{e}^{-0,2t} \\ &= (-1+0,2t+1)\mathrm{e}^{-0,2t} \\ &= 0,2t\mathrm{e}^{-0,2t} \\ &= g(t) \end{aligned}$$

La fonction $G$ est bien une primitive de la fonction $g$ sur l'intervalle $[0;+\infty[$.

2. On a : $\displaystyle\int_0^x 0,2t\mathrm{e}^{-0,2t}\mathrm{d}t = G(x) - G(0) = -x\mathrm{e}^{-0,2x} - 5\mathrm{e}^{-0,2x} + 5$.

Or $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x\mathrm{e}^{-0,2x} = 0$.

☛ On utilise la composition des limites. De plus $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} -0,2x = -\infty$ et $\displaystyle\lim_{X\to-\infty} \mathrm{e}^X = 0$ donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} e^{-0,2x} = 0$.

Ainsi $E(X) = \displaystyle\lim_{x\to+\infty} x\mathrm{e}^{-0,2x} - 5\mathrm{e}^{-0,2x} + 5 = 5$.

### Partie B - Étude de la durée de présence d'un client dans le supermarché

**1.** La variable aléatoire $Z = \dfrac{X-40}{\sigma}$ suit la loi normale centrée réduite.

$$\begin{aligned} P(T<10)=0,067 &\Leftrightarrow P(T-40<-30)=0,067 \\ &\Leftrightarrow P\left(\frac{T-40}{\sigma}<-\frac{30}{\sigma}\right)=0,067 \\ &\Leftrightarrow P\left(Z<-\frac{30}{\sigma}\right)=0,067 \end{aligned}$$

À l'aide de la calculatrice, on trouve $-\dfrac{30}{\sigma} \approx -1,476$

☛ On utilise la touche *inverse loi normale*

Donc $\sigma \approx 20$.

**2.** On veut calculer : $P(T>60)=0,5-P(40<T<60)\approx 0,159$.

Environ 15,9% des clients passent plus d'une heure dans le supermarché.

### Partie C - Durée d'attente pour le paiement

**1.** **a.** $E(X)=\dfrac{1}{\lambda}=5$.

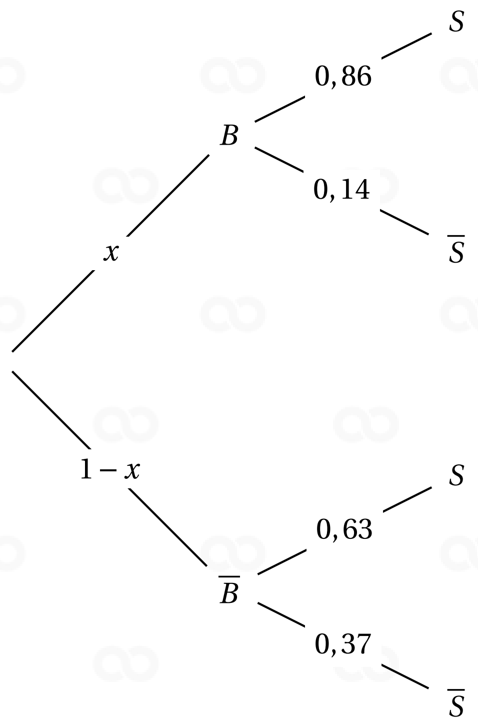
En moyenne un client attend 5 min à une borne automatique.

**b.** $P(T>10)=\mathrm{e}^{-0,2\times 10}=\mathrm{e}^{-2}\approx 0,135$.

La probabilité que la durée d'attente d'un client à une borne automatique de paiement soit supérieure à 10 minutes est environ égal à 0,135.

**2.** On appelle $x$ la probabilité qu'un client choisissent une borne automatique de paiement.

☛ Il est préférable de représenter la situation à l'aide d'un arbre de probabilité



D'après la formule des probabilités totales on a :

$$\begin{aligned} p(S) \geqslant 0,75 &\Leftrightarrow p(S \cap B) + p\left(S \cap \overline{B}\right) \\ &\Leftrightarrow 0,86x + 0,63(1-x) \geqslant 0,75 \\ &\Leftrightarrow 0,23x \geqslant 0,12 \\ &\Leftrightarrow x \geqslant \frac{12}{23} \end{aligned}$$

Il faut donc que la proportion minimale de clients qui doivent choisir une borne automatique de paiement pour que l'objectif soit atteint est donc $\frac{12}{23}$.

**Partie D - Bons d'achat**

**1.** ☛ Il ne faut pas oublier de nommer la variable aléatoire et de dire ce qu'elle représente.

On appelle $C$ la variable aléatoire comptant le nombre de cartes gagnantes.

Le client effectue pour 158,02 € d'achats. Il obtient donc 15 cartes.

On effectue donc 15 tirages aléatoires, identiques, indépendants. Chaque tirage possède deux issues : $G$, "la carte est gagnante", et $\overline{G}$.

De plus $p(G) = 0,005$.

La variable aléatoire $C$ suit donc la loi binomiale de paramètres $n = 15$ et $p = 0,005$.

Ainsi $P(C \geqslant 1) = 1 - P(C = 0) = 1 - (1 - 0,005)^{15} \approx 0,07$.

**2.** ☛ Il est préférable de changer de variable aléatoire car les paramètres ne sont plus les mêmes.

On appelle $D$ la variable aléatoire comptant le nombre de cartes gagnantes.

On effectue $n$ tirages aléatoires, identiques, indépendants. Chaque tirage possède deux issues : $G$, "la carte est gagnante", et $\overline{G}$.

De plus $p(G) = 0,005$.

La variable aléatoire $D$ suit donc la loi binomiale de paramètres $n$ et $p = 0,005$.

$$\begin{aligned} P(D \geqslant 1) > 0,5 &\Leftrightarrow 1 - (1 - 0,005)^n > 0,5 \\ &\Leftrightarrow 0,995^n < 0,5 \\ &\Leftrightarrow n \ln(0,995) < \ln(0,5) \\ &\Leftrightarrow n > \frac{\ln(0,5)}{\ln(0,995)} \end{aligned}$$

Or $\frac{\ln(0,5)}{\ln(0,995)} \approx 138,3$.

☛ Quand on divise par un nombre négatif on change le sens des inégalités.

Il faut donc que $n \geqslant 139$. Cela signifie que le montant d'achats soit supérieur à 1 390 €.

**Exercice 2**

1. $f$ admet un maximum sur l'intervalle $[0;1[$ quand :

$$\begin{aligned} f'(x)=0 &\Leftrightarrow \frac{-bx+b-2}{1-x}=0\\ &\Leftrightarrow -bx+b-2=0\\ &\Leftrightarrow bx=b-2\\ &\Leftrightarrow x=1-\frac{2}{b}\end{aligned}$$

Le maximum est donc :

$$\begin{aligned} f\left(1-\frac{2}{b}\right) &= b-2+2\ln\left(1-1+\frac{2}{b}\right)\\ &= b-2+2\ln\left(\frac{2}{b}\right)\end{aligned}$$

2. ☛ On va montrer qu'il existe une seule valeur de $b$ pour laquelle le maximum atteint la hauteur 1,6.

On considère la fonction $g$ définie sur $[2;+\infty[$ par $g(x)=x-2+2\ln\left(\frac{2}{x}\right)$.

La fonction $g$ est dérivable sur $[2;+\infty[$ comme somme de fonctions dérivables sur cet intervalle.

$g'(x)=1+2\times\dfrac{-\frac{2}{x^2}}{\frac{2}{x}}=1-\dfrac{2}{x}$.

$$\begin{aligned} g'(x)>0 &\Leftrightarrow 1-\frac{2}{x}>0\\ &\Leftrightarrow 1>\frac{2}{x}\\ &\Leftrightarrow 1<\frac{x}{2}\\ &\Leftrightarrow 2<x\end{aligned}$$

La fonction $g$ est donc strictement croissante et continue (car dérivable) sur l'intervalle $[2;+\infty[$.

$g(2)=0<1,6$

$g(x)=x\left(1-\frac{2}{x}+\frac{2}{x}\ln\left(\frac{2}{x}\right)\right)$ $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2}{x}=0$ et $\lim\limits_{x\to0}X\ln X=0$.

Donc $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=+\infty$.

Ainsi $1,6\in[0;+\infty[$.

D'après le théorème de la bijection (ou corollaire du théorème des valeurs intermédiaires) l'équation $g(x)=1,6$ possède donc, sur l'intervalle $[2;+\infty[$ une unique solution $\alpha\approx5,69$.

La fonction $g$ est strictement croissante.

Ainsi la hauteur maximale du projectile ne dépasse pas 1,6 mètre quand $b$ appartient à l'intervalle $[2;\alpha]$.

**3.** On a $f'(x) = \dfrac{-5,69x + 5,69 - 2}{1-x}$

Donc $f'(0) = 3,69$.

Un vecteur directeur de la tangente est par conséquent $\vec{u}(1;3,69)$.

Par conséquent $\tan\theta = \dfrac{3,69}{1}$ donc $\theta \approx 74,8°$.

## Exercice 3

**1.** **a.** Un vecteur directeur de $(AB)$ est $\overrightarrow{AB}\,(10;-8;2)$.
Un vecteur directeur de $(CD)$ est $\overrightarrow{CD}\,(15;12;3)$.

**b.** ☛ Deux droites ne sont pas coplanaires si elles ne sont ni sécantes ni parallèles.

On a $\dfrac{10}{15} = \dfrac{2}{3}$

Et $\dfrac{-8}{12} = -\dfrac{2}{3}$.

Les coordonnées ne sont pas proportionnelles.

Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ ne sont pas colinéaires et les droites $(AB)$ et $(CD)$ ne sont pas parallèles.

Regardons maintenant si les droites sont sécantes.

Une représentation paramétrique de $(AB)$ est : $\begin{cases} x = 10t \\ y = -8t \\ z = 2t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$.

Une représentation paramétrique de $(CD)$ est : $\begin{cases} x = -1 + 15k \\ y = -8 + 12k \\ z = 5 + 3k \end{cases}, k \in \mathbb{R}$

**Remarque :** Attention à bien prendre deux paramètres différents pour la suite.

Cherchons les solutions du système :

$$\begin{cases} x = 10t \\ y = -8t \\ z = 2t \\ x = -1 + 15k \\ y = -8 + 12k \\ z = 5 + 3k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 10t \\ y = -8t \\ z = 2t \\ 10t = -1 + 15k \\ -8t = -8 + 12k \\ 2t = 5 + 3k \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 10t \\ y = -8t \\ z = 2t \\ 10t = -1 + 15k \quad (1) \\ -8t = -8 + 12k \\ 10t = 25 + 15k \quad (2) \end{cases}$$

Les lignes (1) et (2) sont incompatibles. Il n'y a donc pas de point d'intersection.
Les droites $(AB)$ et $(CD)$ ne sont pas coplanaires.

**2.** **a.** L'abscisse du point $I$ est 5.
Par conséquent $10t = 5 \Leftrightarrow t = 0,5$.

Ainsi les coordonnées du point $I$ sont $\begin{cases} x_I = 5 \\ y_I = -4 \\ z_I = 1 \end{cases}$.

L'abscisse du point $J$ est 4.

par conséquent $-1 + 15k = 4 \Leftrightarrow 15k = 5 \Leftrightarrow k = \dfrac{1}{3}$.

Ainsi les coordonnées du point $J$ sont $\begin{cases} x_J = 4 \\ y_J = -4 \\ z_J = 6 \end{cases}$.

Donc :

$$\begin{aligned} IJ &= \sqrt{(4-5)^2 + (-4-(-4))^2 + (6-1)^2} \\ &= \sqrt{1+0+25} \\ &= \sqrt{26} \end{aligned}$$

**b.** On a $\overrightarrow{IJ}\,(-1;0;5)$, $\overrightarrow{AB}\,(10;-8;2)$ et $\overrightarrow{CD}\,(15;12;3)$
D'une part $\overrightarrow{IJ}.\overrightarrow{AB} = -10 + 0 + 10 = 0$
D'autre part $\overrightarrow{IJ}.\overrightarrow{AB} = -15 + 0 + 15 = 0$.
Le vecteur $\overrightarrow{IJ}$ est donc normal aux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$.
Les droites $(IJ)$ et $(AB)$ d'une part et $(IJ)$ et $(CD)$ d'autre part sont donc orthogonales.
Mais $(IJ)$ et $(AB)$ sont sécantes en $I$ et les droites $(IJ)$ et $(CD)$ sont sécantes en $J$.
La droite $(IJ)$ est donc perpendiculaire aux droites $(AB)$ et $(CD)$.

**3.** **a.** Le point $I$ n'appartenant pas à la droite $(CD)$; le point $I$ et la droite $(CD)$ définissent le plan $(IJM')$.
La droite $\Delta$ est parallèle à $(CD)$ et passe par le point $I$ : elle est donc incluse dans le plan $(IJM')$.
Ainsi, dans le plan $(IJM')$, les droites $(JM)$ et $\Delta$ sont parallèles et la droite $(IJ)$ est perpendiculaire à la droite $\Delta$.
La droite parallèle à la droite $(IJ)$ passant par le point $M'$ est donc également perpendiculaire à la droite $\Delta$ : ces deux droites ont bien un point d'intersection appelé $P$.

**b.** Les droites $(IJ)$ et $(M'P)$ sont parallèles par conséquent les vecteurs $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{M'P}$ sont colinéaires.
Le vecteur $\overrightarrow{M'P}$ est alors orthogonal à $\overrightarrow{IP}$ ($(M'P)$ et $\Delta$ sont perpendiculaires) et à $\overrightarrow{IM}$ (car $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{AB}$ le sont).
La droite $\Delta$ est parallèle à $(CD)$. D'après la question 1.b. elle n'est donc pas parallèle à la droite $(AB)$.
Les droites $\Delta$ et $(AB)$ sont sécantes en $I$ : elles définissent le plan $(IMP)$.

Le vecteur $\overrightarrow{M'P}$ est donc orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan $(IMP)$. Il est par conséquent orthogonal à tous les vecteurs de ce plan en particulier à $\overrightarrow{MP}$.
Le triangle $MPM'$ est ainsi rectangle en $P$.

**c.** Dans un triangle rectangle, la longueur de l'hypoténuse est plus grande que la longueur des deux côtés de l'angle droit.
Ainsi $MM' > M'P$ or $IJ = M'P$.
Par conséquent $MM' > IJ$.

**Exercice 4**
*Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité*
**Partie A - Un modèle simple**

**1. a.** On a $\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,1 & 2\,000 \\ 2\times 10^-5 & 0,6 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$

Donc $A = \begin{pmatrix} 1,1 & 2\,000 \\ 2\times 10^-5 & 0,6 \end{pmatrix}$.

Et $U_0 = \begin{pmatrix} 2\,000\,000 \\ 120 \end{pmatrix}$.

**b.** Au 1[ier] juillet 2018 on a $n = 6$.
Donc $U_6 = A^6 \times U_0 \approx \begin{pmatrix} 1\,882\,353 \\ 96 \end{pmatrix}$
Il y aura donc environ 1 882 353 campagnols et 96 renards.

**2. a.** ☛ On n'oublie pas de bien faire toutes les étapes dans une récurrence.
Montrons ce résultat par récurrence.
**Initialisation :** si $n = 0$ alors $P\times D^n \times P^{-1}\times U_0 = P\times I_2\times P^{-1}\times U_0 = U_0$
La propriété est vraie au rang 0.

**Hérédité :** Supposons la propriété vraie au rang $n$ : $U_n = P\times D^n\times P^{-1}\times U_0$.
Montrons qu'elle est encore vraie au rang $n+1$, c'est-à-dire que $U_{n+1} = P\times D^{n+1}\times P^{-1}\times U_0$.

$$\begin{aligned} U_{n+1} &= A\times U_n \\ &= P\times D\times P^{-1}\times P\times D^n\times P^{-1}\times U_0 \\ &= P\times D\times D^n\times P^{-1}\times U_0 \\ &= P\times D^{n+1}\times P^{-1}\times U_0 \end{aligned}$$

La propriété est vraie au rang $n+1$.

**Conclusion :** La propriété est vraie au rang 0 et est héréditaire.
Par conséquent, pour tout entier naturel $n$ on a $U_n = P\times D^n\times P^{-1}\times U_0$.

**b.** Pour tout entier naturel $n$ on a $D_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0,7^n \end{pmatrix}$.

**c.** Pour tout entier naturel $n$ on a : $u_n = \frac{2,8\times 10^7}{15} + \frac{2\times 10^6}{15}\times 0,7^n$ et $v_n = \frac{1400}{15} + \frac{400}{15}\times 0,7^n$.

Puisque $0 < 0,7 < 1$, cela signifie que la suite géométrique de raison $0,7$ est décroissante et que $\lim\limits_{n\to+\infty} 0,7^n = 0$

Par conséquent les suite $(u_n)$ et $(v_n)$ sont décroissantes.

De plus $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \frac{2,8\times 10^7}{15}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \frac{1400}{15} = \frac{280}{3}$

Le nombre de renards et de campagnols va donc décroître pour se stabiliser à environ 93 individus pour les renards et environ 1 866 667 pour les campagnols.

**Partie B - Un modèle plus conforme à la réalité**

**1.** En $B4$ on a pu écrire $= 1,1\times B3 - 0,001\times B3\times C3$.

En $C4$ on a pu écrire $= 2\times 10^{-7}\times B3\times C3 + 0,6\times C3$.

**2.** En utilisant le menu table de la calculatrice on constate qu'à partir de $n = 104$ on observe le phénomène décrit, soit à partir de l'année 2116.

**Partie C**

On appelle $\begin{pmatrix}U & V\end{pmatrix}$ l'état stable.

On veut donc résoudre le système

$$\begin{cases} U = 1,1U\times -0,001U\times V \\ V = 2\times 10^{-7}U\times V + 0,6V \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0,1U = 0,001U\times V \\ 0,4V = 2\times 10^{-7}U\times V \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0,1U(1-0,01V) = 0 \\ 2V\left(0,2-10^{-7}V\right) = 0 \end{cases} \quad (*)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} V = 100 \\ U = 2\times 10^6 \end{cases}$$

$(*)$ $U$ et $V$ ne sont pas nuls.

S'il y a 2 000 000 campagnols et 100 renards alors les deux populations sont stables.