

BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

Session **2010**

Pondichéry (avril 2010)

MATHÉMATIQUES (spécialité)

Correction

Série : **S**

Durée de l'épreuve : **4 heures** – Coefficient : **9**

EXERCICE 1

PARTIE A

Soient a et b deux réels tels que $a < b$.

Soient en outre deux fonctions f et g continues sur l'intervalle $[a; b]$ telles que :

$$\forall t \in [a; b], f(t) \leq g(t).$$

Il vient :

$$\forall t \in [a; b], f(t) \leq g(t) \iff f(t) - g(t) \leq 0 \iff (g - f)(t) \geq 0.$$

D'où, d'après le deuxième résultat supposé connu, comme l'application $g - f$ est positive sur l'intervalle $[a; b]$:

$$\int_a^b (g(t) - f(t)) dt \geq 0.$$

Du coup, en utilisant le premier résultat supposé connu et comme la soustraction est la même opération que l'addition de l'opposé :

$$\int_a^b (g(t) - f(t)) dt = \int_a^b g(t) dt - \int_a^b f(t) dt \geq 0$$

et cette dernière proposition est équivalente à :

$$\int_a^b g(t) dt \geq \int_a^b f(t) dt \iff \int_a^b f(t) dt \leq \int_a^b g(t) dt \text{ comme voulu.}$$

PARTIE B

1. f_1 est la fonction définie sur \mathbb{R}_+ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, f_1(x) = \ln(1 + x).$$

a. Déterminons la limite de la fonction f_1 en plus l'infini :

$$\left(\lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + x = +\infty \right) \wedge \left(\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln = +\infty \right) \stackrel{\text{composition}}{\implies} \lim_{x \rightarrow +\infty} f_1 = +\infty.$$

b. La fonction $x \mapsto 1 + x$ est dérivable sur \mathbb{R}_+ et est en outre strictement positive sur cet intervalle. D'où f_1 , composée de cette fonction par le logarithme népérien est dérivable sur \mathbb{R}_+ .

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, f_1'(x) \stackrel{(\ln u)' = \frac{u'}{u}}{=} \frac{1}{1 + x}.$$

Pour tout réel x positif, $f_1'(x)$ est une quantité strictement positive. Par conséquent, f est strictement croissante sur \mathbb{R}_+ .

- c. La fonction $x \mapsto 1$ est continue donc primitivable sur \mathbb{R}_+ . Choisissons comme fonction primitive $x \mapsto x$.

Il vient d'après la règle d'intégration par parties :

$$I_1 = \int_0^1 f_1(x) dx = \int_0^1 1 \times f_1(x) dx \stackrel{\text{Ipp}}{=} [x \ln(x+1)]_0^1 - \int_0^1 \frac{x dx}{x+1}$$

$$I_1 = \ln 2 - \int_0^1 dx + \int_0^1 \frac{dx}{x+1} \stackrel{\left(\frac{u'}{u}\right)' = \ln|u|}{=} \ln 2 - 1 + [\ln|x+1|]_0^1 = 2\ln 2 - 1.$$

Par continuité et positivité de la fonction f_1 sur l'intervalle $[0; 1]$, I_1 est géométriquement l'aire délimitée par la courbe représentative de la fonction f_1 , les droites d'équation $x = 0$, $x = 1$ et $y = 0$.

2. a. Le segment d'intégration est $[0; 1]$.

$$\forall n \in \mathbb{N}^\times, \forall x \in [0; 1], 0 \leq x \leq 1 \iff 0 \leq x^n \leq 1 \iff 1 \leq 1 + x^n \leq 2$$

$$\begin{aligned} \stackrel{\text{croissance de ln}}{\iff} \ln 1 \leq \ln(1 + x^n) \leq \ln 2 &\stackrel{\text{linéarité de l'intégrale}}{\iff} \int_0^1 0 dx \leq \int_0^1 \ln(1 + x^n) dx \leq \int_0^1 \ln 2 dx \\ &\iff 0 \leq I_n \leq \ln 2. \end{aligned}$$

- b. Pour étudier les variations de la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}^\times}$, déterminons le signe de $I_{n+1} - I_n$ pour tout entier naturel n non nul.

$$\forall n \in \mathbb{N}^\times, I_{n+1} - I_n \stackrel{\text{linéarité de l'intégrale}}{=} \int_0^1 (f_{n+1}(x) - f_n(x)) dx.$$

Il s'agit de comparer f_n et f_{n+1} pour tout entier naturel n non nul.

$$\forall n \in \mathbb{N}^\times, \forall x \in \mathbb{R}, x^{n+1} > x^n \stackrel{\text{composition}}{\iff} \ln(1 + x^{n+1}) > \ln(1 + x^n) \stackrel{\text{linéarité de l'intégrale}}{\iff} I_{n+1} > I_n.$$

Du coup, la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}^\times}$ est strictement croissante.

- c. La suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}^\times}$ est bornée d'après la question 2. a. et est strictement monotone d'après la question 2. b. donc elle converge.

3. Soit g la fonction définie sur \mathbb{R}_+ par $g(x) = \ln(1+x) - x$.

- a. g est une fonction dérivable comme combinaison linéaire de fonctions dérivables et :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, g'(x) = \frac{1}{1+x} - \frac{1+x}{1+x} = -\frac{x}{1+x},$$

quantité strictement négative sur \mathbb{R}_+^\times et nulle si $x = 0$. Par conséquent, $g'(x)$ est strictement négative sur \mathbb{R}_+^\times et ne s'annule qu'en un nombre fini de points sur \mathbb{R}_+ , du coup la fonction g est strictement décroissante sur \mathbb{R}_+ .

- b. $g(0) = \ln(1) - 0 = 0$ et g est strictement décroissante sur \mathbb{R}_+ donc g est nulle en 0 et strictement négative sur \mathbb{R}_+ . Du coup :

$$\forall X \in \mathbb{R}_+, g(X) \leq 0 \iff \ln(1+X) \leq X.$$

Soit $n \in \mathbb{N}^\times$ fixé. En effectuant le changement de variable $X = x^n$, comme $x^n \in \mathbb{R}_+$, la relation est vérifiée également d'où :

$$\forall n \in \mathbb{N}^\times, \forall x \in \mathbb{R}_+, \ln(1+x^n) \leq x^n.$$

c. Soit ℓ la limite de la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

Par linéarité de l'intégrale, il est possible de déduire de la relation trouvée en 3. b. :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \int_0^1 \ln(1+x^n) dx \leq \int_0^1 x^n dx \iff I_n \leq \left[\frac{1}{n+1} x^{n+1} \right]_0^1 \iff I_n \leq \frac{1}{n+1}.$$

En passant aux limites, il vient :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n+1} \iff \ell \leq 0.$$

D'après la question 2. a., $\forall n \in \mathbb{N}^*, 0 \leq I_n \leq \ln 2$, donc la limite ℓ de la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est comprise entre 0 et $\ln 2$. Par passage aux limites, nous obtenons :

$$0 \leq \ell \leq \ln 2.$$

Finalement, il vient d'après le théorème d'encadrement :

$$0 \leq \ell \leq 0 \implies \ell = 0 \implies \lim I_n = 0.$$

EXERCICE 2
Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

PARTIE A

1. En remplaçant a et b par leurs expressions respectives du et dv , il vient :

$$a^2 = b^3 \iff (du)^2 = (dv)^3 \iff d^2u^2 = d^3v^3 \iff u^2 = dv^3.$$

2. Par définition, $d = a \wedge b \implies \frac{a}{d} \wedge \frac{b}{d} = 1 \implies u \wedge v = 1$. D'après le théorème de Bézout :

$$\exists(\lambda; \mu) \in \mathbb{Z}^2 / \lambda u + \mu v = 1 \iff \lambda u^2 + \mu u v = u \iff \lambda v^3 + \mu u v = u \iff v(\lambda v^2 + \mu u) = u.$$

Or $\lambda v^2 + \mu u \in \mathbb{Z}$ comme combinaison linéaire d'entiers relatifs. Du coup $v \mid u$. Finalement :

$$(u \wedge v = 1) \wedge (v \mid u) \implies v = 1.$$

3. Démontrons cette proposition par implications successives :

Soit n un entier naturel fixé.

– Démonstration de « $a^2 = b^3 \implies \exists n \in \mathbb{N} / (a = n^3) \wedge (b = n^2)$ » :

$$a^2 = b^3 \implies u^2 = dv^3 \stackrel{v=1}{\implies} (u^2 = d) \wedge (b = dv = d) \implies (a = du = u^3) \wedge (b = d = u^2).$$

– Démonstration de « $\exists n \in \mathbb{N} / (a = n^3) \wedge (b = n^2) \implies a^2 = b^3$ » :

$$(a = n^3) \wedge (b = n^2) \implies (a^2 = n^6) \wedge (b^3 = n^6) \implies a^2 = b^3.$$

Finalement :

$$a^2 = b^3 \iff \exists n \in \mathbb{N} / (a = n^3) \wedge (b = n^2).$$

4. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\exists(\alpha; \beta) \in \mathbb{N}^2 / n = \alpha^2 = \beta^3.$$

Tableau de congruence modulo 7 ($n[7]$ représente le reste dans la division euclidienne de n par 7) :

$\alpha[7]$	0	1	2	3	4	5	6
$\alpha^2[7]$	0	1	4	2	2	4	1
$\beta[7]$	0	1	2	3	4	5	6
$\beta^3[7]$	0	1	1	6	1	6	6

(Les cas en gras sont les seuls cas compatibles).

Par réflexivité :

$$n \equiv n[7] \implies \alpha^2 \equiv \beta^3[7] \implies (\alpha^2 \equiv 0 \vee 1[7]) \wedge (\beta^3 \equiv 0 \vee 1[7]) \implies n \equiv 0 \vee 1[7].$$

PARTIE B

1. Tout d'abord, z^3 est le produit de deux carrés et est donc positif. Par conséquent la surface S ne possède pas de points de cote strictement négative d'où le cas $\lambda < 0$ est représenté par le graphique 2.

Ensuite, si $\lambda = 0$, la section par le plan $z = \lambda$ de la surface S est la section d'équation $x^2 \times y^2 = 0 \iff (x = 0) \vee (y = 0)$ qui est la réunion de l'axe des abscisses et des ordonnées. Du coup le cas $\lambda = 0$ est représenté par le graphique 1.

Par déduction le graphique 3 représente le cas $\lambda > 0$.

2. a. L'équation de C_{25} est :

$$x^2 \times y^2 = 25^3 \iff (xy)^2 = 25^3.$$

D'après la partie A, xy et 25 sont respectivement le cube et le carré d'un même entier, c'est-à-dire de 5. Donc $xy = 5^3 = 125$. En outre, x et y sont strictement positifs et sont deux diviseurs associés de 125.

Soit $D_+(125)$ l'ensemble des diviseurs strictement positifs de 125.

$$D_+(125) = \{1; 5; 25; 125\}.$$

Il existe donc quatre points de C_{25} dont les coordonnées sont strictement positives : le point (1; 125), le point (5; 25), le point (25; 5) et le point (125; 1).

- b. De même, l'équation de C_{2010} est :

$$(xy)^2 = 2010^3.$$

D'après la partie A, xy et 2010 sont nécessairement le cube et le carré d'un même entier. Or il n'existe pas de nombre entier dont le carré est 2010 ($\sqrt{2010} \approx 44,83$). Du coup :

$$\nexists (x; y) \in \mathbb{N}^2 / (xy)^2 = 2010^3.$$

Finalement, il n'existe pas de point de C_{2010} ayant des coordonnées entières strictement positives.

EXERCICE 3

1. a. Le cas où la variable aléatoire X prend la valeur -1 est soit le cas où une boule rouge puis une boule blanche ont été tirées, soit l'inverse. Il vient, comme le jeu étudié est modélisable par une situation d'équiprobabilité :

$$P(X = -1) = \frac{\binom{10}{1} \times \binom{n}{1}}{\binom{n+10}{2}} = \frac{\frac{10!}{1!9!} \times \frac{n!}{1!(n-1)!}}{\frac{(n+10)!}{2!(n+8)!}} = \frac{10 \times n}{(n+10)(n+9)2^{-1}} = \frac{20n}{(n+10)(n+9)}.$$

- b. Les quatre cas possibles sont en fait :

- Une boule blanche puis une rouge — c'est-à-dire $X = -1$;
- Une boule rouge puis une blanche — c'est-à-dire $X = -1$;
- Deux boules rouges — c'est-à-dire $X = -6$;
- Deux boules blanches — c'est-à-dire $X = 4$.

Les deux premiers cas ont été traités ; les autres s'étudient de manière similaire :

$$P(X = -6) = \frac{\binom{n}{2}}{\binom{n+10}{2}} = \frac{\frac{n!}{2!(n-2)!}}{\frac{(n+10)!}{2!(n+8)!}} = \frac{n(n-1)}{(n+10)(n+9)}.$$

$$P(X = 4) = \frac{\binom{10}{2}}{\binom{n+10}{2}} = \frac{\frac{10!}{2!8!}}{\frac{(n+10)!}{2!(n+8)!}} = \frac{90}{(n+10)(n+9)}.$$

- c. Exprimons l'espérance mathématique de la variable aléatoire X :

$$E(X) \stackrel{\text{déf.}}{=} \sum_{i=1}^3 x_i \times P(X = x_i).$$

Calculons l'espérance mathématique de la variable aléatoire X :

$$E(X) = -1 \times \frac{20n}{(n+10)(n+9)} - 6 \times \frac{n^2 - n}{(n+10)(n+9)} + 4 \frac{90}{(n+10)(n+9)}$$

$$E(X) = \frac{-20n - 6n^2 + 6n + 360}{(n+10)(n+9)} = \frac{-6n^2 - 14n + 360}{(n+10)(n+9)}.$$

- d.** La quantité $(n+10)(n+9)$ est strictement positive pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2. Par conséquent, le signe de l'espérance mathématique $E(X)$ est celui de la quantité $(-6n^2 - 14n + 360)$.

Le polynôme du second degré $-6x^2 - 14x + 360$ admet pour discriminant :

$$(-14)^2 - 4 \times (-6) \times (360) = 8836 > 0.$$

Par conséquent, il possède deux racines réelles distinctes, à savoir -9 et $\frac{20}{3}$. En conséquence, d'après les valeurs que peut prendre n et comme $\left\lfloor \frac{20}{3} \right\rfloor = 6$, il vient :

$$\forall n \in \llbracket 2; 6 \rrbracket, -6n^2 - 14n + 360 > 0 \implies E(X) > 0.$$

- 2.** La situation est modélisable par une loi binomiale. La probabilité d'obtenir une boule blanche (par conséquent de faire un échec) est égale à :

$$\frac{\binom{10}{1}}{\binom{n+10}{1}} = \frac{10}{n+10}.$$

D'où pour vingt occurrences, le problème revient à déterminer n tel que :

$$\left(\frac{10}{n+10}\right)^{20} \leq 1 - 0,999 \stackrel{n \in \mathbb{N}}{\implies} n \geq \left\lceil \frac{10}{\sqrt[20]{0,001}} - 10 \right\rceil \implies n \geq 5.$$

- 3. a.** Déterminons $P(Z \leq 50)$:

$$P(Z \leq 50) = \int_0^{50} 0,01 e^{-0,01x} dx = [-e^{-0,01x}]_0^{50} = 1 - e^{-0,5}.$$

- b.** Calculons cette probabilité conditionnelle :

$$P_{(Z \leq 50)}(Z \leq 60) = \frac{P(50 \leq Z \leq 60)}{1 - P(Z \leq 50)} = \frac{e^{-0,5} - e^{-0,6}}{e^{-0,5}} = 1 - e^{-0,1}.$$

EXERCICE 4

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite numérique définie par $u_0 = 1$ et par la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + n - 2.$$

1. Calculons u_1, u_2, u_3 :

$$u_1 = \frac{1}{3}u_0 + 0 - 2 = \frac{1}{3} - 2 = -\frac{5}{3}.$$

$$u_2 = \frac{1}{3}u_1 + 1 - 2 = -\frac{5}{9} - 1 = -\frac{14}{9}.$$

$$u_3 = \frac{1}{3}u_2 + 2 - 2 = -\frac{14}{27} + 0 = -\frac{14}{27}.$$

2. a. Soit P la propriété définie comme suit :

$$\forall n \in (\mathbb{N} \setminus \llbracket 0; 3 \rrbracket), P(n) \iff u_n \geq 0$$

et démontrons cette propriété par récurrence.

Initialisation Montrons que $P(4)$ est vraie.

$$u_4 = \frac{1}{3}u_3 + 3 - 2 = -\frac{14}{81} + 1 = \frac{67}{81} \geq 0 \implies P(4).$$

Hérédité Supposons $P(n)$ vraie pour un entier naturel n supérieur ou égal à 4 fixé ; montrons qu'alors $P(n+1)$ est vraie.

$$P(n) \implies (u_n \geq 0).$$

$$(u_n \geq 0) \wedge (n-2 > 0) \xrightarrow{\text{composition}} \left(u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + n - 2 \geq n - 2 \geq 0 \right) \implies P(n+1).$$

Conclusion D'après l'axiome de récurrence :

$$P(4) \wedge (\forall n \in (\mathbb{N} \setminus \llbracket 0; 3 \rrbracket), P(n) \implies P(n+1)) \implies \forall n \in (\mathbb{N} \setminus \llbracket 0; 3 \rrbracket), P(n).$$

b. Il vient, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 5, d'après l'hérédité de la question 2. a. :

$$u_{n+1} \geq n - 2 \implies u_{n+1} \geq (n-1) - 2 \geq n - 3$$

soit pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 5, $u_n \geq n - 3$.

c. La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est minorée par une suite divergente car :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n - 3 = +\infty.$$

Comme à partir du rang 5, $u_n \geq n - 3$ et que cette suite diverge vers plus l'infini, par comparaison la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ diverge également vers plus l'infini.

$$\lim u_n = +\infty.$$

3. Soit $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite numérique définie par la relation de récurrence suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N}, v_n = -2u_n + 3n - \frac{21}{2}.$$

a. Calculons v_{n+1} pour tout entier naturel n :

$$\forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1} = -2u_{n+1} + 3n + 3 - \frac{21}{2} = -2\left(\frac{1}{3}u_n + n - 2\right) + 3n + 3 - \frac{21}{2} = -\frac{2}{3}u_n + n + \frac{7}{2} = \frac{1}{3}v_n.$$

D'où $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison géométrique $\frac{1}{3}$ et de premier terme

$$v_0 = -2u_0 + 0 - \frac{21}{2} = -\frac{25}{2}.$$

b. $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite géométrique, du coup :

$$\forall n \in \mathbb{N}, v_n \stackrel{\text{déf.}}{=} v_0 \times \left(\frac{1}{3}\right)^n.$$

D'après la relation de récurrence définissant $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$:

$$\forall n \in \mathbb{N}, v_n = -2u_n + 3n - \frac{21}{2} \iff u_n = -\frac{1}{2}\left(v_n - 3n + \frac{21}{2}\right).$$

Du coup, il est aisé d'obtenir l'expression de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ en fonction de n :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = -\frac{1}{2}\left(-\frac{25}{2} \times \left(\frac{1}{3}\right)^n - 3n + \frac{21}{2}\right) = \frac{25}{4}\left(\frac{1}{3}\right)^n + \frac{3}{2}n - \frac{21}{4} \text{ comme voulu.}$$

c. Soit n un entier naturel et :

$$S_n = \sum_{k=0}^n u_k = \frac{25}{4} \sum_{k=0}^n \left(\frac{1}{3}\right)^k + \frac{3}{2} \sum_{k=0}^n k - \sum_{k=0}^n \frac{21}{4}.$$

Calculons S_n . La première somme est celle des termes d'une suite géométrique de raison $\frac{1}{3}$ et de premier terme 1.

$$S_n = \frac{25}{4} \times \left(\frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{3}} \right) + \frac{3}{2} \frac{n(n+1)}{2} - \frac{21(n+1)}{4} = \frac{75\left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right) + 6(n+1)(n-7)}{8}.$$