



Fiche 2 – Dérivation

INTRODUCTION

Les notions de nombre dérivé et de fonction dérivée ont déjà été abordées dans les classes antérieures. Néanmoins, un rappel est toujours utile pour bien comprendre la définition de nombre dérivé à droite et à gauche, la dérivée d'une fonction composée, les dérivées successives et autres nouveautés.

I- Définition du nombre dérivé

Le taux de variation (ou taux d'accroissement) de la fonction f en a est :

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} = t(h)$$

En posant, $a+h = x$, on a $\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = t(h)$

Si $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ existe, f est dérivable en a .

Cette limite est notée $f'(a)$; c'est le nombre dérivé de f en a .

II- Tangente à une courbe

La tangente en $A(a,b)$ à la courbe C , représentative de f : c'est la droite passant par A , de coefficient directeur $f'(a)$. Une équation de la tangente en A est $y = f'(a)(x-a) + f(a)$

III- L'approximation affine

Il existe un nombre réel l et une fonction ε définie sur un intervalle J telle que pour tout x de J ,

$$(1) f(x) = f(a) + l(x-a) + (x-a)\varepsilon(x) \text{ avec } \lim_{x \rightarrow a} \varepsilon(x) = 0 \quad \text{On note } l = f'(a)$$

En posant $x-a = h$, on a la fonction $h \mapsto f(a) + lh$ est l'approximation affine de la fonction $h \mapsto f(a+h)$ au voisinage de 0. Pour h proche de 0, $f(a+h) \approx f(a) + lh$

On peut retrouver et retenir quelques approximations affines de fonctions usuelles au voisinage de 0

Fonctions	$h \mapsto (1+h)^2$	$h \mapsto (1+h)^3$	$h \mapsto \frac{1}{1+h}$	$h \mapsto \sqrt{1+h}$
Approximations affines en 0	$h \mapsto 1+2h$	$h \mapsto 1+3h$	$h \mapsto 1-h$	$h \mapsto 1+\frac{1}{2}h$

Pour retrouver ces approximations, on utilise l'équation (1).

Ainsi, pour $f(x) = (1 + h)^2$, on a $(1 + h)^2 = 1 + 2h + h^2$ Or, $f'(0) = 1$.

Donc, on retrouve l'équation (1) avec $l = 2$ et $x - a = h$

$$\lim_{x \rightarrow 0} h = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0$$

IV- Définition d'une fonction dérivable

Si f est une fonction définie sur un intervalle J et si, en chaque point de J , f admet un nombre dérivé, alors f est **dérivable sur J** .

De même, la fonction qui à chaque x_0 de J associe le nombre dérivé de f en x_0 est la fonction dérivée, on la note f' .

Le tableau suivant récapitule les dérivées des fonctions usuelles :

Fonctions	Ensemble de définition	Ensemble de dérivabilité	Fonctions dérivées
$x \mapsto k$	Réel	Réel	$x \mapsto 0$
$x \mapsto x$	Réel	Réel	$x \mapsto 1$
$x \mapsto x^2$	Réel	Réel	$x \mapsto 2x$
$x \mapsto x^3$	Réel	Réel	$x \mapsto 3x^2$
$x \mapsto x^n$, n un naturel $\neq 0$	Réel	Réel	$x \mapsto nx^{n-1}$
$x \mapsto \frac{1}{x}$	Réel non nul	Réel non nul	$x \mapsto -\frac{1}{x^2}$
$x \mapsto x^{-n}$	Réel non nul	Réel non nul	$x \mapsto -nx^{-(n+1)}$
$x \mapsto \sqrt{x}$	Réel positif	Réel non nul positif	$x \mapsto \frac{1}{2\sqrt{x}}$
$x \mapsto \sin x$	Réel	Réel	$x \mapsto \cos x$
$x \mapsto \cos x$	Réel	Réel	$x \mapsto -\sin x$
$x \mapsto \tan x$	Réel - $\left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$	Réel - $\left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$	$x \mapsto 1 + \tan^2 x$



Même si toutes ces définitions figurent sur un formulaire, il est très utile de connaître par cœur les dérivées et les opérations usuelles sur les fonctions dérivables, car vous les utiliserez fréquemment dans les exercices de maths. Ainsi, vous gagnerez beaucoup de temps !

Le tableau suivant présente les opérations classiques sur les fonctions dérivables ; les fonctions f et g sont dérivables sur I

Conditions	Fonctions	Fonctions dérivées
	$f + g$	$(f + g)' = f' + g'$
K est un réel non nul	kf	$(kf)' = kf'$
	fg	$(fg)' = gf' + fg'$
Pour tout x de I tel que $f(x) \neq 0$	$\frac{1}{f}$	$\left(\frac{1}{f}\right)' = -\frac{f'}{f^2}$
Pour tout x de I tel que $g(x) \neq 0$	$\frac{f}{g}$	$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{gf' - fg'}{g^2}$
a est un réel non nul et b un réel	$x \mapsto f(ax + b)$	$x \mapsto af'(ax + b)$

V- Nombre dérivé à gauche et à droite

Soit une fonction f définie en M d'abscisse x_0 d'un intervalle I

f est dérivable à gauche en x_0 si le taux d'accroissement de f en x_0 admet une limite A_2 à gauche en x_0 .

A_2 est le nombre dérivé à gauche de f en x_0 . A_2 est le coefficient directeur d'une demie-tangente T_2 à la courbe C représentative de f en M .

f est dérivable à droite en x_0 si le taux d'accroissement de f en x_0 admet une limite A_1 à droite en x_0 .

A_1 est le nombre dérivé à droite de f en x_0 . A_1 est le coefficient directeur d'une demie-tangente T_1 à la courbe C représentative de f en M .

VI- Composition

f est une fonction définie sur I ; g est une fonction définie sur J ; pour $x \in I, f(x) \in J$

$$g \circ f(x) = g[f(x)]$$

$$x \xrightarrow{f} f(x) = y \xrightarrow{g} g(y) = g[f(x)] = g \circ f = z$$

Rq: $f \circ g \neq g \circ f$



VII- Dérivée d'une fonction composée

Théorème :

Soit la fonction h définie par $h(x) = f \circ g(x)$, si g est dérivable en u et f dérivable en $v = g(u)$ alors h est dérivable en u et $h'(u) = f' \circ g(u) \times g'(u)$

Retenir : $(f \circ g)' = (f' \circ g) \times g'$

VIII- Des fonctions dérivées à retenir

Fonctions	Ensemble de définition	Ensemble de dérivabilité	Fonctions dérivées
$x \mapsto \ln x$	Réel positif non nul	Réel positif non nul	$x \mapsto \frac{1}{x}$
$x \mapsto \exp x$	Réel	Réel	$x \mapsto \exp x$
$x \mapsto x^\alpha$ ($\alpha \in \text{réel}$)	Réel positif non nul	Réel positif non nul	$x \mapsto \alpha x^{\alpha-1}$
$x \mapsto a^x$ ($a > 0$)	Réel	Réel	$x \mapsto (\ln a) a^x$

Soient u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I .

Fonctions	Conditions	Fonction dérivée
$v \circ u$		$(v' \circ u) \times u'$
u^n	n est un entier relatif et $u(x) \neq 0$ pour $n < 0$	$nu^{n-1} \times u'$
\sqrt{u}	$u(x) > 0$	$\frac{u'}{2\sqrt{u}}$
$\ln u$	$u(x) > 0$	$\frac{u'}{u}$
e^u		$u' e^u$
u^α	$u(x) > 0$ et α est un réel non nul	$\alpha u' u^{\alpha-1}$



IX- Limite infinie du taux d'accroissement

Si $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = +\infty$ (ou $-\infty$), la fonction f n'admet pas de nombre dérivé en a .

La courbe représentative de f admet au point d'abscisse a , une tangente parallèle à l'axe des ordonnées.

X- Dérivées successives

f est dérivable sur $I \Rightarrow f$ admet une fonction dérivée, définie sur I :

f' (notation mathématique) ou $\frac{df}{dx}$ (notation physique et parfois mathématique)

Si f' est aussi dérivable sur $I \Rightarrow f'$ admet une fonction dérivée, définie sur I : f'' ou $\frac{d^2f}{dx^2}$

$f', f'', f^{(3)}, \dots, f^{(n)}$ sont les **dérivées successives** de f

XI- Théorème des inégalités des accroissements finis

Pour tout x de I et quel que soient a et b tels que $a \leq b$

Si $m \leq f'(x) \leq M$, alors $m(b - a) \leq f(b) - f(a) \leq M(b - a)$

Si $|f'(x)| \leq M$, alors $|f(b) - f(a)| \leq M(b - a)$

XII- Exemple d'application

Soit la fonction $f(x) = (x^2 + 8x - 3)^2$; A a pour abscisse 1

- Montrer que f est dérivable en A
- Donner l'équation de la tangente en A
- Calculer la fonction dérivée f' de f

Solutions :

$$t(h) = \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \frac{((1+h)^2 + 8(1+h) - 3)^2 - 6^2}{h} = \frac{(6 + 10h + h^2)^2 - 6^2}{h} = \dots$$

$$= 120 + 112h + 20h^2 + h^3$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} t(h) = 120$$

Donc, f est dérivable en 1 et 120 est son nombre dérivé.

$$y = f'(a)(x - a) + f(a) \text{ d'où } y = 120(x - 1) + 36 = 120x - 84$$

$$f'(x) = (g \circ h(x))' = h' \times (g' \circ h) \text{ où } h(x) = x^2 + 8x - 3 \text{ et } g(x) = x^2$$

$$h'(x) = 2x + 8 ; g'(x) = 2x$$

$$\text{D'où } f'(x) = (2x + 8) \times 2(x^2 + 8x - 3) = 4(x + 2)(x^2 + 8x - 3)$$

Conclusion

Cette fiche récapitule beaucoup de formules de fonctions dérivées qu'il est vivement conseillé de connaître par cœur. Ce chapitre sur les dérivations est, comme celui sur les limites, fondamental, pour réaliser une étude de fonctions.