Fiche 3 – Etude d'une fonction

INTRODUCTION

L'étude d'une fonction est un exercice incontournable en Terminale S. Pour vous préparer le plus efficacement possible, cette fiche récapitule le plan d'étude d'une fonction avec les questions classiques, envisageables. Puis, pas à pas, la résolution de ces questions sera détaillée.

I- Plan d'étude d'une fonction f

- Donner l'ensemble de définition D de la fonction f
- La fonction f, est-elle paire, impaire ou périodique ?
- Quelles sont les limites aux bornes de l'ensemble de définition ? La courbe représentative de la fonction f, admet-elle des asymptotes ?
- Etudier la dérivabilité de f et calculer la dérivée f'.
- Quel est le signe de f' ? Quelles sont les variations de f et de f' ?
- Dresser le tableau de variations de la fonction f.
- Etudier des droites et/ou points particuliers (tangentes, axe et centre de symétrie éventuels).
- Faire une représentation graphique de la courbe représentative de la fonction f, C_f.
- **Qu'est-ce-que recouvre l'ensemble de définition D ?**

On dit qu'une fonction f est définie sur un ensemble D si et seulement si pour tout x de D, f(x) existe.

II- Parité et périodicité

Comment démontrer qu'une fonction f est paire ?

$\forall\, x \in D, si (-x) \in D \ et \ f(-x) = f(x) \ alors\ la\ fonction\ f\ est\ paire$

Conséquence : Si f est paire, dans le repère orthogonal (Oj) est alors axe de symétrie.
L'intervalle d'étude de la fonction f devient $D \cap \mathbb{R}^+$

Comment démontrer qu'une fonction f est impaire ?

$\forall\, x \in D, si (-x) \in D \ et \ f(-x) = -f(x) \ alors\ la\ fonction\ f\ est\ impaire$

Conséquence : Si f est impaire, dans un repère orthonormé, O est alors centre de symétrie.
L'intervalle d'étude de la fonction f devient $D \cap \mathbb{R}^+$

Comment démontrer qu'une fonction f est périodique ?

Soit P un réel positif, non nul.

$\forall x \in D, si\ (x+P) \in D\ et\ f(x+P) = f(x)\ alors\ la\ fonction\ f\ est\ périodique, de\ période\ P.$

Conséquence : Le domaine d'étude de la fonction f devient $[\Omega, \Omega + P[$ où $\Omega \in \mathbb{R}$. La courbe C représentative de la fonction f est obtenue par la translation de vecteur kPī, k étant un entier relatif.

III- Limites et asymptotes de la fonction f

Si vous avez des difficultés sur la question de détermination des limites, référez-vous à la fiche sur les limites. Néanmoins, il faut savoir identifier les branches infinies ou asymptotes. Ce sont les droites vers lesquelles la courbe représentative C se rapproche, lorsque x et/ou y tend vers l'infini.

Soit $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$

$\lim_{x \to a+} f(x) = +\infty$ ou $\lim_{x \to a-} f(x) = +\infty$ ou $\lim_{x \to a+} f(x) = -\infty$ ou $\lim_{x \to a-} f(x) = -\infty$	**La droite d'équation x=a est asymptote à la courbe C_f**
$\lim_{x \to +\infty} f(x) = b$ ou $\lim_{x \to -\infty} f(x) = b$	**La droite d'équation y=b est asymptote à la courbe C_f au voisinage de +∞ ou de -∞**
$\lim_{x \to +\infty} [f(x) - (ax+b)] = 0$ ou $\lim_{x \to -\infty} [f(x) - (ax+b)] = 0$	**La droite d'équation y=ax+b est asymptote oblique à la courbe C_f au voisinage de +∞ ou de -∞**

IV- Dérivabilité de f

Il convient d'étudier la dérivabilité de f sur son ensemble de définition le plus restreint, en tenant compte des propriétés de parité, de périodicité ou de symétrie de la fonction f.

Pour calculer la dérivée f', vous pouvez vous référer à la fiche sur la dérivabilité.

Rappel : l'ensemble de définition E de la dérivabilité de f est l'ensemble des points de D pour lesquels f, admet un nombre dérivé.

Une fois la dérivée f' calculée, quelles sont les variations de la fonction f, fonction dérivable sur un intervalle E ?

Si f'=0, alors f est constante.

Si f'>0 sauf en un nombre fini de points isolés ou f' =0, alors f est strictement croissante sur E.

Si f'<0 sauf en un nombre fini de points isolés ou f' =0, alors f est strictement décroissante sur E.

Si f est impaire, alors f varie de la même façon sur chacun des intervalles symétriques de $D \cap \mathbb{R}^+$ **et de** $D \cap \mathbb{R}^-$.

Si f est paire, alors f a un sens opposé de variation sur chacun des intervalles symétriques de $D \cap \mathbb{R}^+$ **et de** $D \cap \mathbb{R}^-$.

V- Tableau de variation

Le tableau de variation peut ressembler à l'un des 2 tableaux suivants ; il découle de l'étude de f et de f'.

x		a	
f'	+	0	-
f	↗	f(a)	↘

x		a	
f'	-	0	+
f	↘	f(a)	↗

Dans le tableau de gauche, f(a) est le maximum de f sur I atteint en a.
Dans le tableau de droite, f(a) est le minimum de f sur I atteint en a.

<u>Comment déterminer un maximum ou un minimum d'une fonction ?</u>

Si $\forall x \in D, f(x) \leq M,$ alors M est le maximum de la fonction f sur son ensemble D de définition.

Si $\forall x \in D, f(x) \geq m,$ alors m est le minimum de la fonction f sur son ensemble D de définition.

VI- Etude des droites et/ou points particuliers

<u>Comment démontrer qu'une fonction f admet un axe de symétrie ?</u>

$\forall x \in D, si (a-x) \in D, si\ (a+x) \in D\ et\ si\ f(a-x) = f(a+x)$

$alors\ la\ fonction\ f\ a\ un\ axe\ de\ symétrie$

Cet axe de symétrie est la droite d'équation x=a. L'étude de la fonction f peut être restreinte à $D \cap [a, +\infty[$

<u>Comment démontrer qu'une fonction f admet un centre de symétrie ?</u>

$\forall x \in D, si (a-x) \in D, si\ (a+x) \in D\ et\ si\ f(a-x) + f(a+x) = 2b$

alors la fonction f a un centre de symétrie

Ce centre de symétrie est le point de coordonnées (a,b). L'étude de la fonction f peut être restreinte à $D \cap [a,+\infty[$

Quelle est la position d'une courbe par rapport à une tangente ?

Soit une fonction f définie et dérivable sur I et dont la dérivée f' est dérivable sur I.

Soit C_f la courbe représentative de f et T la tangente en A(a, f(a)) appartenant à C_f avec a un élément de I.

Selon le signe de f''(a), on obtiendra différentes positions de la courbe par rapport à la tangente T :

x	a
f''	+
f'	↗ 0 ↗
f	↘ f(a) ↗
Position de C_f par rapport à T	C_f est au-dessus et sur T

x	a
f''	-
f'	↘ 0 ↘
f	↗ f(a) ↘
	C_f est en dessous et sur T

x	a
f''	+ 0 -
f'	↗ 0 ↘
f	↘ f(a) ↘
	C_f traverse T

x	a
f''	- 0 +
f'	↘ 0 ↗
f	↗ f(a) ↗
	C_f traverse T

Comment comparer 2 fonctions ?

Soient f et g 2 fonctions définies sur un intervalle I. Pour comparer f et g, on peut déterminer le signe de $\varphi = f - g$ en étudiant les variations de φ. Si $f(x) \geq g(x)$ sur I, alors $f \geq g$ et C_f est au-dessus ou sur C_g.

VII- Caractéristiques graphiques de quelques fonctions usuelles

Fonctions	**Noms et propriétés**	**Courbe représentative**
$x \longmapsto k$	**Fonction constante**	**Droite parallèle à l'axe des abscisses**
$x \longmapsto x$	**Identité dans $\mathbb{R}$**	**Bissectrice du premier et troisième quadrants dans un**

		repère orthonormé
$x \longmapsto ax$ et $a \neq 0$	**Fonction linéaire**	**Droite passant par l'origine**
$x \longmapsto ax + b$	**Fonction affine**	**Droite sécante à l'axe des ordonnées de coefficient directeur a**
$x \longmapsto ax^2 + bx + c$	**Fonction trinôme du second degré**	**Parabole de sommet** S $\left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac-b^2}{4a}\right)$
$x \longmapsto ax^3$	**Fonction monôme du troisième degré**	
$x \longmapsto a\sqrt{x}$	**Fonction définie sur** $\mathbb{R}^+$ et dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$	**Demi-parabole**
$x \longmapsto \frac{a}{x}$	**Fonction définie sur** $\mathbb{R}^*$. Fonction impaire.	**Hyperbole a<0 avec 2 asymptotes d'équations** $x = 0$ **et** $y = 0$
$x \longmapsto \frac{ax+b}{cx+d}$	**Fonction homographique avec** $c \neq 0$ **et** $ad - bc \neq 0$	**Hyperbole avec 2 asymptotes d'équations** $x = -\frac{d}{c}$ **et** $y = \frac{a}{c}$
$x \longmapsto \lvert x \rvert$	**Fonction paire définie sur** $\mathbb{R}$, dérivable sur $\mathbb{R}^*$	**Réunion de demi-droites**
$x \longmapsto \sin x$	Fonction impaire de période 2π	**Sinusoïde**
$x \longmapsto \cos x$	Fonction paire de période 2π	
$x \longmapsto \tan x$	Fonction impaire de période π	**Asymptotes d'équations** $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$

VIII- Autres questions liées à l'étude d'une fonction

<u>Comment montrer que f est majorée ou minorée ?</u>

La fonction f est majorée par M sur J, si, quel que soit x de J, $f(x) \leq M$
La fonction f est minorée par m sur J, si quel que soit x de J, $f(x) \geq m$
On dit que la fonction f est bornée sur J si elle est majorée et minorée, c'est-à-dire, s'il existe 2 réels m et M tels que $m \leq f(x) \leq M$; ce qui équivaut à montrer que $|f(x)| \leq M$

Conclusion

Cette fiche vous donne les notions essentielles à connaître pour l'étude d'une fonction. Il convient de les maîtriser. Dans la résolution d'un tel exercice, il faut néanmoins toujours faire preuve de logique et de rigueur. Pour l'étude d'une fonction, les questions s'enchaînent, en étroite dépendance les unes des autres : soyez donc vigilants ! Ne brûlez aucune étape !