BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

Session **2010**

Pondichéry (avril 2010)

MATHÉMATIQUES (obligatoire)
Correction

Série : **S**

Durée de l'épreuve : **4** heures – Coefficient : **7**

EXERCICE 1

PARTIE A

Soient a et b deux réels tels que $a < b$.
Soient en outre deux fonctions f et g continues sur l'intervalle $[a;b]$ telles que :

$$\forall t \in [a;b], f(t) \leqslant g(t).$$

Il vient :

$$\forall t \in [a;b], f(t) \leqslant g(t) \Longleftrightarrow f(t) - g(t) \leqslant 0 \Longleftrightarrow (g - f)(t) \geqslant 0.$$

D'où, d'après le deuxième résultat supposé connu, comme l'application $g - f$ est positive sur l'intervalle $[a;b]$:

$$\int_a^b (g(t) - f(t))\,\mathrm{d}t \geqslant 0.$$

Du coup, en utilisant le premier résultat supposé connu et comme la soustraction est la même opération que l'addition de l'opposé :

$$\int_a^b (g(t) - f(t))\,\mathrm{d}t = \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t - \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \geqslant 0$$

et cette dernière proposition est équivalente à :

$$\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t \geqslant \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \Longleftrightarrow \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t \text{ comme voulu.}$$

PARTIE B

1. f_1 est la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, f_1(x) = \ln(1 + x).$$

a. Déterminons la limite de la fonction f_1 en plus l'infini :

$$\left(\lim_{x \longrightarrow +\infty} 1 + x = +\infty\right) \wedge \left(\lim_{+\infty} \ln = +\infty\right) \overset{\text{composition}}{\Longrightarrow} \lim_{+\infty} f_1 = +\infty.$$

b. La fonction $x \longmapsto 1 + x$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et est en outre strictement positive sur cet intervalle. D'où f_1, composée de cette fonction par le logarithme népérien est dérivable sur $\mathbb{R}_+$.

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, f_1'(x) \overset{(\ln u)' = \frac{u'}{u}}{=} \frac{1}{1 + x}.$$

Pour tout réel x positif, $f_1'(x)$ est une quantité strictement positive. Par conséquent, f est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$.

c. La fonction $x \longmapsto 1$ est continue donc primitivable sur $\mathbb{R}_+$. Choisissons comme fonction primitive $x \longmapsto x$.
Il vient d'après la règle d'intégration par parties :

$$I_1 = \int_0^1 f_1(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 1 \times f_1(x)\,\mathrm{d}x \overset{\text{IPP}}{=} [x\ln(x+1)]_0^1 - \int_0^1 \frac{x\,\mathrm{d}x}{x+1}$$

$$I_1 = \ln 2 - \int_0^1 \mathrm{d}x + \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x+1} \overset{\left(\frac{u'}{u}\right)^{\backslash}=\ln|u|}{=} \ln 2 - 1 + [\ln|x+1|]_0^1 = 2\ln 2 - 1.$$

Par continuité et positivité de la fonction f_1 sur l'intervalle $[0;1]$, I_1 est géométriquement l'aire délimitée par la courbe représentative de la fonction f_1, les droites d'équation $x=0$, $x=1$ et $y=0$.

2. **a.** Le segment d'intégration est $[0;1]$.

$$\forall n \in \mathbb{N}^\times, \forall x \in [0;1], 0 \leqslant x \leqslant 1 \Longleftrightarrow 0 \leqslant x^n \leqslant 1 \Longleftrightarrow 1 \leqslant 1+x^n \leqslant 2$$

$$\underset{\text{de ln}}{\overset{\text{croissance}}{\Longleftrightarrow}} \ln 1 \leqslant \ln\left(1+x^n\right) \leqslant \ln 2 \underset{\text{l'intégrale}}{\overset{\text{linéarité de}}{\Longleftrightarrow}} \int_0^1 0\,\mathrm{d}x \leqslant \int_0^1 \ln\left(1+x^n\right)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_0^1 \ln 2\,\mathrm{d}x$$

$$\Longleftrightarrow 0 \leqslant I_n \leqslant \ln 2.$$

b. Pour étudier les variations de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^\times}$, déterminons le signe de $I_{n+1} - I_n$ pour tout entier naturel n non nul.

$$\forall n \in \mathbb{N}^\times, I_{n+1} - I_n \underset{\text{l'intégrale}}{\overset{\text{linéarité de}}{=}} \int_0^1 \left(f_{n+1}(x) - f_n(x)\right)\,\mathrm{d}x.$$

Il s'agit de comparer f_n et f_{n+1} pour tout entier naturel n non nul.

$$\forall n \in \mathbb{N}^\times, \forall x \in \mathbb{R}, x^{n+1} > x^n \overset{\text{composition}}{\Longleftrightarrow} \ln\left(1+x^{n+1}\right) > \ln\left(1+x^n\right) \underset{\text{l'intégrale}}{\overset{\text{linéarité de}}{\Longleftrightarrow}} I_{n+1} > I_n.$$

Du coup, la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^\times}$ est strictement croissante.

c. La suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^\times}$ est bornée d'après la question **2. a.** et est strictement monotone d'après la question **2. b.** donc elle converge.

3. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par $g(x) = \ln(1+x) - x$.

a. g est une fonction dérivable comme combinaison linéaire de fonctions dérivables et :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, g'(x) = \frac{1}{1+x} - \frac{1+x}{1+x} = -\frac{x}{1+x},$$

quantité strictement négative sur $\mathbb{R}_+^\times$ et nulle si $x=0$. Par conséquent, $g'(x)$ est strictement négative sur $\mathbb{R}_+^\times$ et ne s'annule qu'en un nombre fini de points sur $\mathbb{R}_+$, du coup la fonction g est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+$.

b. $g(0) = \ln(1) - 0 = 0$ et g est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+$ donc g est nulle en 0 et strictement négative sur $\mathbb{R}_+$. Du coup :

$$\forall X \in \mathbb{R}_+, g(X) \leqslant 0 \Longleftrightarrow \ln(1+X) \leqslant X.$$

Soit $n \in \mathbb{N}^\times$ fixé. En effectuant le changement de variable $X = x^n$, comme $x^n \in \mathbb{R}_+$, la relation est vérifiée également d'où :

$$\forall n \in \mathbb{N}^\times, \forall x \in \mathbb{R}_+, \ln(1+x^n) \leqslant x^n.$$

c. Soit ℓ la limite de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^\times}$.
Par linéarité de l'intégrale, il est possible de déduire de la relation trouvée en **3. b.** :

$$\forall n \in \mathbb{N}^\times, \int_0^1 \ln(1+x^n)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_0^1 x^n\,\mathrm{d}x \Longleftrightarrow I_n \leqslant \left[\frac{1}{n+1}x^{n+1}\right]_0^1 \Longleftrightarrow I_n \leqslant \frac{1}{n+1}.$$

En passant aux limites, il vient :

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} I_n \leqslant \lim_{n\longrightarrow+\infty} \frac{1}{n+1} \Longleftrightarrow \ell \leqslant 0.$$

D'après la question **2. a.**, $\forall n \in \mathbb{N}^\times, 0 \leqslant I_n \leqslant \ln 2$, donc la limite ℓ de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^\times}$ est comprise entre 0 et $\ln 2$. Par passage aux limites, nous obtenons :

$$0 \leqslant \ell \leqslant \ln 2.$$

Finalement, il vient d'après le théorème d'encadrement :

$$0 \leqslant \ell \leqslant 0 \Longrightarrow \ell = 0 \Longrightarrow \lim I_n = 0.$$

EXERCICE 2

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

L'espace est rapportée au repère orthonormal $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$.

1. Soit la droite de représentation paramétrique :

$$\left\{\begin{array}{l} x = t+2 \\ y = -2t \\ z = 3t-1 \end{array}\right. .$$

Un vecteur normal au plan d'équation cartésienne $x+2y+z-3=0$ est le vecteur $\vec{n}(1;2;1)$. Un vecteur directeur de cette droite est $\vec{d}(1;-2;3)$. Si ces deux vecteurs sont orthogonaux, alors le plan d'équation cartésienne $x+2y+z-3=0$ sera parallèle à cette droite.

$$\vec{n}\cdot\vec{d} = 1-4+3 = 0 \Longrightarrow \vec{n}\perp\vec{d}.$$

Donc cette première proposition est **vraie**.

2. Le système formé par les équations des trois plans :

$$\left\{\begin{array}{l} x-2y+3z=3 \\ 2x+3y-2z=6 \\ 4x-y+4z=12 \end{array}\right.$$

possède comme solutions tous les triplets de réels $\left(x=\dfrac{21-5t}{7}; y=\dfrac{8t}{7}; z=t\right)$ avec un paramètre réel t. D'où les trois plans possèdent une infinité de points en commun.
Cette seconde proposition est **fausse**.

3. Soient t et u deux paramètres réels. Le système formé par les représentations paramétriques des deux droites :

$$\left\{\begin{array}{l} x=2-3t \\ y=1+t \\ z=-3+2t \end{array}\right. \quad\wedge\quad \left\{\begin{array}{l} x=7+2u \\ y=2+2u \\ z=-6-u \end{array}\right.$$

ne possède pas de solution. Par conséquent, il n'existe pas de point commun aux deux droites donc elles ne sont pas sécantes.
Du coup, cette troisième proposition est **fausse**.

4. Le plan (ABC) a une équation de la forme :

$$ax+by+cz=d.$$

Déterminons un vecteur normal au plan (ABC) à l'aide du produit vectoriel.

$$(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}) = -24\vec{\imath} - 24\vec{k}.$$

D'où l'équation de (ABC) est de la forme :

$$(ABC) : -24x-24z=d.$$

Le point A appartient au plan donc ses coordonnées vérifient son équation.

$$-24\times(-1)-24\times(2) = d \Longrightarrow d=-24.$$

Du coup l'équation du plan (ABC) est dans l'espace :

$$(ABC) : -24x - 24z = -24 \iff x + z = 1.$$

Par conséquent cette quatrième proposition est **vraie**.

5. Si C est un barycentre des points A et B, il doit être sur la droite (AB), ce qui signifie :

$$\exists k \in \mathbb{R}^{\times} / \overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{AB}.$$

Or il n'existe pas de réel non nul k vérifiant cette relation, par conséquent les deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires et le point C ne peut pas être un barycentre des points A et B.
Cette cinquième proposition est **fausse**.

EXERCICE 3

1. **a.** Le cas où la variable aléatoire X prend la valeur -1 est soit le cas où une boule rouge puis une boule blanche ont été tirées, soit l'inverse. Il vient, comme le jeu étudié est modélisable par une situation d'équiprobabilité :

$$P(X=-1)=\frac{\binom{10}{1}\times\binom{n}{1}}{\binom{n+10}{2}}=\frac{\frac{10!}{1!9!}\times\frac{n!}{1!\,(n-1)!}}{\frac{(n+10)!}{2!\,(n+8)!}}=\frac{10\times n}{(n+10)(n+9)2^{-1}}=\frac{20n}{(n+10)(n+9)}.$$

b. Les quatre cas possibles sont en fait :
- Une boule blanche puis une rouge — c'est-à-dire $X=-1$;
- Une boule rouge puis une blanche — c'est-à-dire $X=-1$;
- Deux boules rouges — c'est-à-dire $X=-6$;
- Deux boules blanches — c'est-à-dire $X=4$.

Les deux premiers cas ont été traités ; les autres s'étudient de manière similaire :

$$P(X=-6)=\frac{\binom{n}{2}}{\binom{n+10}{2}}=\frac{\frac{n!}{2!\,(n-2)!}}{\frac{(n+10)!}{2!\,(n+8)!}}=\frac{n(n-1)}{(n+10)(n+9)}.$$

$$P(X=4)=\frac{\binom{10}{2}}{\binom{n+10}{2}}=\frac{\frac{10!}{2!8!}}{\frac{(n+10)!}{2!\,(n+8)!}}=\frac{90}{(n+10)(n+9)}.$$

c. Exprimons l'espérance mathématique de la variable aléatoire X :

$$E(X)\overset{\text{déf.}}{=}\sum_{i=1}^{3}x_i\times P(X=x_i).$$

Calculons l'espérance mathématique de la variable aléatoire X :

$$E(X)=-1\times\frac{20n}{(n+10)(n+9)}-6\times\frac{n^2-n}{(n+10)(n+9)}+4\frac{90}{(n+10)(n+9)}$$

$$E(X)=\frac{-20n-6n^2+6n+360}{(n+10)(n+9)}=\frac{-6n^2-14n+360}{(n+10)(n+9)}.$$

d. La quantité $(n+10)(n+9)$ est strictement positive pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2. Par conséquent, le signe de l'espérance mathématique $E(X)$ est celui de la quantité $(-6n^2-14n+360)$.
Le polynôme du second degré $-6x^2-14x+360$ admet pour discriminant :

$$(-14)^2-4\times(-6)\times(360)=8836>0.$$

Par conséquent, il possède deux racines réelles distinctes, à savoir -9 et $\dfrac{20}{3}$. En conséquence, d'après les valeurs que peut prendre n et comme $\left\lfloor\dfrac{20}{3}\right\rfloor=6$, il vient :

$$\forall n\in[\![2;6]\!],-6n^2-14n+360>0\Longrightarrow E(X)>0.$$

2. La situation est modélisable par une loi binomiale. La probabilité d'obtenir une boule blanche (par conséquent de faire un échec) est égale à :

$$\frac{\binom{10}{1}}{\binom{n+10}{1}}=\frac{10}{n+10}.$$

D'où pour vingt occurences, le problème revient à déterminer n tel que :

$$\left(\frac{10}{n+10}\right)^{20}\leqslant 1-0,999\overset{n\in\mathbb{N}}{\Longrightarrow} n\geqslant\left\lceil\frac{10}{\sqrt[20]{0,001}}-10\right\rceil\Longrightarrow n\geqslant 5.$$

3. **a.** Déterminons $P(Z\leqslant 50)$:

$$P(Z\leqslant 50)=\int_0^{50}0,01e^{-0,01x}\,\mathrm{d}x=\left[-e^{-0,01x}\right]_0^{50}=1-e^{-0,5}.$$

b. Calculons cette probabilité conditionnelle :

$$P_{(Z\leqslant 50)}(Z\leqslant 60)=\frac{P(50\leqslant Z\leqslant 60)}{1-P(Z\leqslant 50)}=\frac{e^{-0,5}-e^{-0,6}}{e^{-0,5}}=1-e^{-0,1}.$$

EXERCICE 4

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite numérique définie par $u_0 = 1$ et par la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + n - 2.$$

1. Calculons u_1, u_2, u_3 :

$$u_1 = \frac{1}{3}u_0 + 0 - 2 = \frac{1}{3} - 2 = -\frac{5}{3}.$$

$$u_2 = \frac{1}{3}u_1 + 1 - 2 = -\frac{5}{9} - 1 = -\frac{14}{9}.$$

$$u_3 = \frac{1}{3}u_2 + 2 - 2 = -\frac{14}{27} + 0 = -\frac{14}{27}.$$

2. **a.** Soit P la propriété définie comme suit :

$$\forall n \in \left(\mathbb{N}\backslash[\![0;3]\!]\right), P(n) \Longleftrightarrow u_n \geqslant 0$$

et démontrons cette propriété par récurrence.

Initialisation Montrons que $P(4)$ est vraie.

$$u_4 = \frac{1}{3}u_3 + 3 - 2 = -\frac{14}{81} + 1 = \frac{67}{81} \geqslant 0 \Longrightarrow P(4).$$

Hérédité Supposons $P(n)$ vraie pour un entier naturel n supérieur ou égal à 4 fixé ; montrons qu'alors $P(n+1)$ est vraie.

$$P(n) \Longrightarrow (u_n \geqslant 0).$$

$$(u_n \geqslant 0) \wedge (n - 2 > 0) \overset{\text{composition}}{\Longrightarrow} \left(u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + n - 2 \geqslant n - 2 \geqslant 0\right) \Longrightarrow P(n+1).$$

Conclusion D'après l'axiome de récurrence :

$$P(4) \wedge \left(\forall n \in \left(\mathbb{N}\backslash[\![0;3]\!]\right), P(n) \Longrightarrow P(n+1)\right) \Longrightarrow \forall n \in \left(\mathbb{N}\backslash[\![0;3]\!]\right), P(n).$$

b. Il vient, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 5, d'après l'hérédité de la question **2. a.** :

$$u_{n+1} \geqslant n - 2 \Longrightarrow u_{n+1} \geqslant (n-1) - 2 \geqslant n - 3$$

soit pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 5, $u_n \geqslant n - 3$.

c. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée par une suite divergente car :

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} n - 3 = +\infty.$$

Comme à partir du rang 5, $u_n \geqslant n - 3$ et que cette suite diverge vers plus l'infini, par comparaison la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge également vers plus l'infini.

$$\lim u_n = +\infty.$$

3. Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite numérique définie par la relation de récurrence suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N}, v_n = -2u_n + 3n - \frac{21}{2}.$$

a. Calculons v_{n+1} pour tout entier naturel n :

$$\forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1} = -2u_{n+1}+3n+3-\frac{21}{2} = -2\left(\frac{1}{3}u_n + n - 2\right)+3n+3-\frac{21}{2} = -\frac{2}{3}u_n+n+\frac{7}{2} = \frac{1}{3}v_n.$$

D'où $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison géométrique $\frac{1}{3}$ et de premier terme $v_0 = -2u_0 + 0 - \frac{21}{2} = -\frac{25}{2}$.

b. $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique, du coup :

$$\forall n \in \mathbb{N}, v_n \overset{\text{déf.}}{=} v_0 \times \left(\frac{1}{3}\right)^n.$$

D'après la relation de récurrence définissant $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$:

$$\forall n \in \mathbb{N}, v_n = -2u_n + 3n - \frac{21}{2} \Longleftrightarrow u_n = -\frac{1}{2}\left(v_n - 3n + \frac{21}{2}\right).$$

Du coup, il est aisé d'obtenir l'expression de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en fonction de n :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = -\frac{1}{2}\left(-\frac{25}{2} \times \left(\frac{1}{3}\right)^n - 3n + \frac{21}{2}\right) = \frac{25}{4}\left(\frac{1}{3}\right)^n + \frac{3}{2}n - \frac{21}{4} \text{ comme voulu.}$$

c. Soit n un entier naturel et :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k = \frac{25}{4}\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{3}\right)^n + \frac{3}{2}\sum_{k=0}^{n} n - \sum_{k=0}^{n}\frac{21}{4}.$$

Calculons S_n. La première somme est celle des termes d'une suite géométrique de raison $\frac{1}{3}$ et de premier terme 1.

$$S_n = \frac{25}{4} \times \left(\frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{3}}\right) + \frac{3}{2}\frac{n(n+1)}{2} - \frac{21(n+1)}{4} = \frac{75\left(1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right)+6(n+1)(n-7)}{8}.$$