Mathématiques S juin 2009

CORRIGÉ

Les encadrés marqués “approfondissement” sont là pour vous éclairer sur la façon dont le sujet a été réalisé. C’est l’occasion de voir un peu le dessous des cartes en quelques sortes.

Exercice 1 (sur 4 points) SUITES

1) **étude simple**

a) $v_{n+1} = \dfrac{v_n}{3}$ géométrique de raison $\dfrac{1}{3}$

Comment trouve-t-on ce résultat ?
Le petit schéma donne la méthode:

$$\begin{array}{ccc} u_{n+1} & \underset{\textit{récurrence}}{\longleftarrow} & u_n \\ \uparrow\downarrow & & \uparrow\downarrow \\ v_{n+1} & ? & v_n \end{array}$$

- On passe de u_n à u_{n+1} par la *relation de récurrence* $u_{n+1} = \dfrac{1}{3}u_n + 4$
- On échange u_n et v_n par la relation $v_n = u_n - 6$ (qui s’inverse aisément en $u_n = v_n + 6$)
- On échange u_{n+1} et v_{n+1} par la même relation $v_{n+1} = u_{n+1} - 6$

Ainsi donc:

$v_{n+1} = u_{n+1} - 6$ et $u_{n+1} = \dfrac{1}{3}u_n + 4$ et $u_n = v_n + 6$ donc:

$$v_{n+1} = u_{n+1} - 6 = \frac{1}{3}u_n - 2 = \frac{1}{3}(v_n + 6) - 2 = \frac{v_n}{3}$$

Approfondissement: La suite (u_n) est un mélange de suite arithmétique et géométrique puisque pour passer d’un terme à l’autre on multiplie par 1/3 et on ajoute (-6). On dit que c’est une suite **arithmético-géométrique**.

Pour étudier de telles suites, on passe toujours par une suite auxiliaire $v_n = u_n + \alpha$. Si le concepteur du sujet choisit bien α , la suite (v_n) sera géométrique. Pour ce faire, il résoud $x = \dfrac{1}{3}x + 4$ (point fixe). Faites le, vous trouverez $\alpha = -6$.

b) terme général: il faut bien regarder ce que l’on connaît: <u>à présent, on tient une suite géométrique</u> (v_n). On applique donc la formule des formules géométriques:

- on sait que $v_n = v_0 \times \left(\dfrac{1}{3}\right)^n$
- on n’a pas v_0 : on le calcule, $v_0 = u_0 - 6 = -5$ d’où $v_n = \dfrac{-5}{3^n}$
- on remplace dans $u_n = v_n + 6$, on trouve: $\boxed{u_n = \dfrac{-5}{3^n} + 6}$

Remarques sur les fractions:

On peut écrire: $\dfrac{-5}{3^n} = -\dfrac{5}{3^n} = -5 \times \left(\dfrac{1}{3}\right)^n$ ou, en généralisant:

$$a \times \frac{-b}{c^n} = -ab \times \frac{1}{c^n} = -ab \times \left(\frac{1}{c}\right)^n = \frac{-a}{c^n} \times b = a \times \frac{-b}{c^n}$$

c) $\left|\dfrac{1}{3}\right| < 1$ donc $\left(\dfrac{1}{3}\right)^n \to 0$ donc $u_n \to 6$.

Rappel: Limites des suites géométriques :
la limite de $(a\times b^n)$ dépend de la valeur de b et du signe de a.

$\lvert b\rvert > 1$	$\lvert b\rvert < 1$
$a\times b^n \to \pm\infty$ suivant le signe de a	$a\times b^n \to 0$

2) **suite composée**
L'énoncé propose ici une suite inhabituelle. Il s'agit d'une suite définie par récurrence, c'est à dire qu'on donne la formule permettant de passer de u_n *à* u_{n+1}.

Prise de recul: comment définir une suite

• par son <u>terme général</u>. Cela signifie donner la formule donnant la valeur de u_n en fonction de *n*. C'est comme donner l'expression de f(x) en fonction de x. Exemple $u_n = 2n+1$
• par une <u>relation de récurrence</u>. Il n'y a pas d'équivalent pour les fonctions. Cela signifie donner u_{n+1} en fonction de u_n. Exemple $u_{n+1} = 2\times u_n$.

Le truc, c'est que parfois, on définit des suites par des formules qui mélangent n, u_n et u_{n+1}. Ce sont des récurrences compliquées qui demandent de l'astuce. C'est le cas ici de la suite (w_n)

a) pour le calcul, la question qu'il faut se poser c'est « par combien je remplace *n* »
Je veux w_{10} je remplace donc *n* par 10; je trouve:
$10w_{10} = 11w_9 + 1$ puis on se débrouille.

$$w_{10} = \frac{11w_9+1}{10} = \frac{11\times 19+1}{10} = 21$$

b) initiative:
il s'agit d'observer. Quelque chose saute aux yeux ! . Ce qu'on «voit», il faut ensuite le traduire en termes mathématiques.

• conjecture:
je remarque que la suite w est celle des entiers impairs
je traduis ça mathématiquement en postulant $w_n = 2n+1$

Rappel: Traduction des trucs élémentaires
• nombres pairs 2,4,6,8... $a_n = 2n$
• impairs 1,3,5,7... $a_n = 2n+1$
• premiers 1,2,3,5,7,11,13... si vous trouvez postulez pour le Nobel
• alternés 1,-1,1,-1... $a_n = (-1)^n$
• doublement 1,2,4,8,16... $a_n = 2^n$

• il faut démontrer la conjecture !!! pour cela, récurrence:
- vrai en n=0
- si c'est vrai en (n-1) alors $w_n = \dfrac{(n+1)w_{n-1}+1}{n}$ d'où

$$w_n = \frac{(n+1)(2n-1)+1}{n} = 2n+1 \text{ cqfd}$$

• calcul élémentaire $w_{2009} = 2\times 2009+1 = 4019$

Culture: La récurrence.
• principe de l'hérédité: je suppose que c'est vrai en *n*, je montre que c'est vrai en *n+1* (ou je suppose vrai en *n-1* je montre que c'est vrai en *n*)
• ce principe a été présenté par de nombreux mathématiciens de l'histoire, en particulier Pascal. Il est donné comme un "trait d'intuition".
Question: peut on le démontrer ?
• au XIX on formalise les mathématiques, et le principe de récurrence devient une partie intégrante des propriétés des entiers naturels (construction de **N**)
• la présentation des ordres de grandeur (présentée dans certains lycées) postule l'existence d'une qualité ne vérifiant pas la récurrence (nombres "standards")
• il existe une récurrence sur des indices non entiers (réels, continus donc), cela est appelé récurrence transfinie. Ce n'est pas au programme de lycée...

enfin, pour conclure: il ne faut pas confondre les deux usages du mot récurrence
- *suite définie par récurrence = formule pour passer d'un terme au suivant*
- *démonstration par récurrence = méthode de démonstration reposant sur le principe de l'hérédité (propriété qui se transmet d'un terme à l'autre)*

Exercice 2 (sur 6 points) INTÉGRALE

I) étude de fonction

1) **limite**

• on écrit que $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(xe^{-x}\right)$ ést indéterminée mais fait 0 d'après le cours.

> **Rappel**: limites indéterminées : $\frac{\infty}{\infty}$ $\frac{0}{0}$ $0\times\infty$ $\infty-\infty$
>
> • Le cas $\frac{\infty}{\infty}$ se résoud souvent en invoquant les croissances comparées. e^x croît «plus vite» que x^n qui croît lui même «plus vite» que $\sqrt{x}$ qui croît lui même «plus vite» que $\ln x$
>
> • Ceci s'écrit parfois $e^x >> x^n >> \sqrt{x} >> \ln x$, la notation >> a un sens précis**:** $e^x >> x^n$ signifie que $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{e^x}{x}\right)=+\infty$. Il existe d'autres notations aussi.
>
> • il est bon aussi de comprendre que $\lim\frac{f}{g}=+\infty \Leftrightarrow \lim\frac{g}{f}=0^+$
>
> Oralement: «l'inverse de l'infini est zéro et réciproquement»

Dans cette question, $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(xe^{-x}\right)$ peut être vu comme $\infty\times 0$ mais aussi comme $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{e^x}\right)$ donc $\frac{\infty}{\infty}$. D'après les croissances comparées, cela fait 0.

• nous en déduisons que, par addition et par composition,
$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+xe^{-x}\right)=1$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left(1+xe^{-x}\right)=\ln 1=0$

2) **signe de la dérivée**

• il faut d'abord justifier que f(x) est toujours définie dans $[0;+\infty[$. Justification: dans cet intervalle on a $x\geq 0$ et $e^{-x}>0$ donc $xe^{-x}\geq 0$ donc $1+xe^{-x}\geq 1$ donc $1+xe^{-x}>0$

> **Rappel: Df de certaines composées**
> - $\ln u$ est définie là où $u>0$
> - $\sqrt{u}$ est définie là où $u\geq 0$
> - e^u est définie partout
> - $\frac{1}{u}$ est définie là où $u\neq 0$

• on détermine la dérivée

$f=\ln u$ soit $f'=\frac{u'}{u}$ et $u=1+xe^{-x}$ et $u'=0+1e^{-x}-xe^{-x}=(1-x)e^{-x}$

conclusion: $f'(x)=\frac{(1-x)e^{-x}}{1+xe^{-x}}$; ceci est du signe de 1-x, tout simplement parce qu'en dehors de 1-x, tout est... positif. En effet, pour tout x, $e^{-x}>0$ et le bas a déjà été traité plus haut.

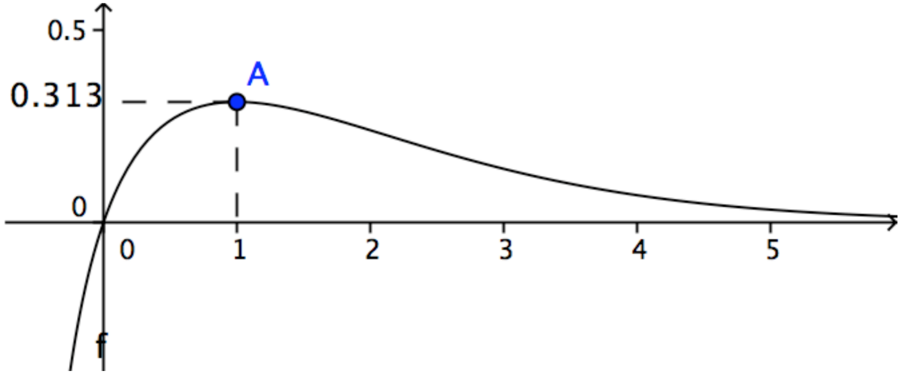
> **Approfondissement: comportement de ln u**
>
> $\ln u$ est définie là où $u>0$. Ainsi la dérivée $(\ln u)'=\frac{u'}{u}$ est du signe de u'. Les variations de *u* et de *ln u* seront donc les mêmes.
> Quelles différences y a til donc entre les fonction *u* et *ln u* ?
> • là où u≤0, $\ln u$ n'est pas définie: "trous" dans le graphique.
> • là où u s'approche de 0, $\ln u$ plonge vers $-\infty$
> • là où u=1, $\ln u$ s'annulle.
> • là où u diverge vers $+\infty$, $\ln u$ y diverge aussi mais moins vite.

3) **variations**

tableau très simple:

x	1		1		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	−	
$f(x)$	0	↗		↘	0

Le maximum vaut $\ln\left(1+\frac{1}{e}\right)\approx 0{,}313$

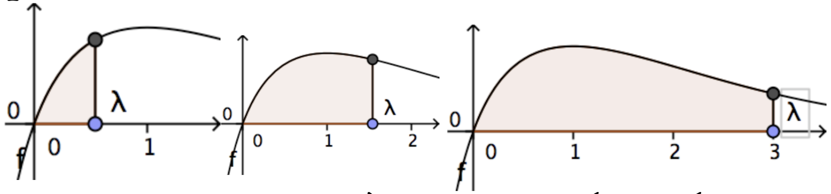


Remarque: en étudiant la fonction $x \to 1 + xe^{-x}$ on pourrait montrer qu'en fait la fonction f est définie un peu à gauche de 0, jusqu'à -0,57 environ.

II) majoration de l'intégrale

On ne connaît pas de primitive de $\ln\left(1+xe^{-x}\right)$ *et une intégration par parties artificielle (u=1 et v=f) n'aboutit à rien, comme c le cas dans 90% de l'activité mathématique. Ce qui est intéressant c'est alors d'encadrer l'intégrale.*

1) **première méthode**

a) 

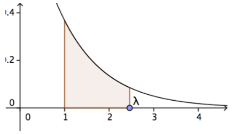
DIGRESSION QUI N'A RIEN À VOIR AVEC L'ÉNONCÉ:

Essayons de lire qualitativement le comportement de $A(\lambda)$ *:*

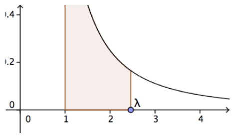
- $A(\lambda)$ *semble tendre vers 0 si* $\lambda \to 0$
- $A(\lambda)$ *semble croître avec* λ *.*
- $A(\lambda)$ *aura t elle une limite ? C'est à dire si l'on colorie la surface sous la courbe jusqu'à* $\lambda \to +\infty$ *, l'aire sera t elle finie ou infinie ?*

Approfondissement: aires finies ou infinies

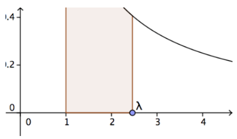
Appelons $A(\lambda)$ l'aire sous la courbe de 1 à λ. Je prends 1 au lieu de 0 car dans les exemples qui suivent 0 peut être valeur interdite



- si $f(x)=e^{-x}$, $A(\lambda)\to 0{,}37$ quand $\lambda \to +\infty$



- si $f(x)=\frac{1}{x^2}$, $A(\lambda)\to 1$ quand $\lambda \to +\infty$



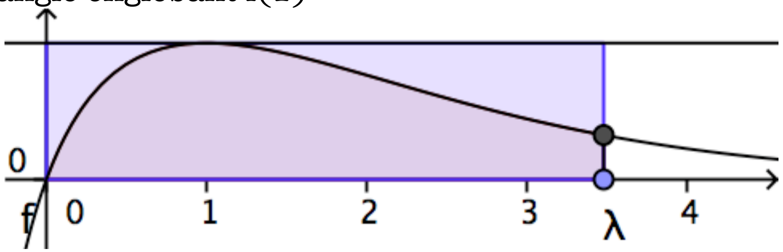
- si $f(x)=\frac{1}{x}$, $A(\lambda)\to +\infty$ quand $\lambda \to +\infty$ •

La théorie générale de ces aires infinies est étudiée dans le supérieur.

b) d'après le tableau de variation, f(1) est le maximum de f dans $[0;+\infty[$. Autrement dit, pour tout x de $[0;+\infty[$ on a f(x)<f(1). L'intégrale conserve l'ordre donc $\int_0^\lambda f(x)dx \le \int_0^\lambda f(1)dx$. Or, attention, la fonction f(1) est une constante son intégrale vaut donc $\int_a^b C^{ste}dx = C^{ste}(b-a)$

Ici donc $\int_0^\lambda f(x)dx \le \lambda f(1)$

Ceci revient à majorer l'aire sous la courbe par un grand rectangle englobant f(1)



majoration première méthode

2) **deuxième méthode**

a) intégration par parties:

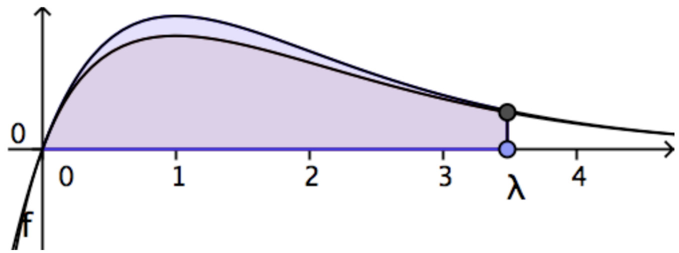
$$\int_0^\lambda xe^{-x}dx = \left[-xe^{-x}\right]_0^\lambda - \int_0^\lambda \left(-e^{-x}\right)dx = -\lambda e^{-\lambda} - \left[e^{-x}\right]_0^\lambda = -\lambda e^{-\lambda} - \left(e^{-\lambda}-1\right)$$

finalement: $\int_0^\lambda xe^{-x}dx = -\lambda e^{-\lambda} - e^{-\lambda} + 1$

b) En suivant l'énoncé on peut écrire que:

$$\int_0^\lambda \ln\left(1+xe^{-x}\right)dx \le \int_0^\lambda xe^{-x}dx \quad \text{d'où} \int_0^\lambda \ln\left(1+xe^{-x}\right)dx \le -\lambda e^{-\lambda} - e^{-\lambda} + 1$$

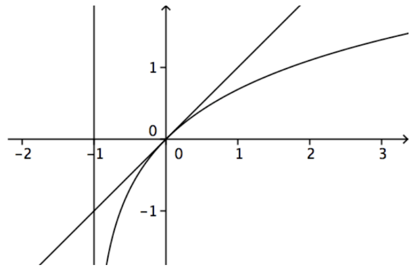
Voici un graphique où j'ai tracé les deux fonctions $\ln\left(1+xe^{-x}\right)$ et xe^{-x} :



majoration seconde méthode

On voit que l'approximation est beaucoup plus fine.

Remarque pour mieux pénétrer le sujet:
Voici les deux courbes (x) et ln(1+x) (avec l'asymptote de ln(1+x))



On remarque que ces deux courbes «collent» autour de 0, mais se décollent carrément dès que x se rapproche soit de −1 soit de +∞.

Dans le problème de ce sujet de bac, xe^{-x} est toujours entre 0 et 0,37 (faites-en le tableau de variations entre 0 et +∞ vous verrez). C'est pourquoi xe^{-x} et $\ln\left(1+xe^{-x}\right)$ sont si proches.

3) **application numérique**

méthode 1: $A(5) \le \lambda \ln\left(1+\frac{1}{e}\right) \approx 0,313\lambda \approx 1,566$

méthode 2: $A(5) \le -\lambda e^{-\lambda} - e^{-\lambda} + 1$ soit $0,960$

La méthode 2 est donc largement plus valable.

La calculatrice donne une valeur approchée de 0,855.

Rappel: **intégrale sur la calculatrice**

• sur Ti, math, fntint, ensuite taper

fnint(fonction,variable,borneinf, bornesup)

ici donc fnint(20(x-1)e^(-0.5x),x,0.5,5)

• Sur casio option, calc, symbole intégral

$\int$ (fonction,borneinf, bornesup, variable)

ici donc $\int$ (20(x-1)e^(-0.5x),0.5,5,x)

• La dénomination des touches peut varier suivant les modèles.

Exercice 3 (sur 5 points) PROBAS

I) question de cours

on applique les formules

$\binom{n-1}{p-1} = \frac{(n-1)!}{(p-1)!(n-p)!}$ et $\binom{n-1}{p} = \frac{(n-1)!}{(p)!(n-p-1)!}$

Toute la difficulté consiste ensuite à mettre au même dénominateur.

Pour comprendre ça, le mieux est de prendre des exemples. Dans la pratique des maths, prendre des exemples est souvent salutaire. L'exemple ne prouve rien, bien sûr, mais donne une idée de la démarche à suivre.

• Regardons $\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}$. Le dénominateur commun est 4! le voyez vous ? Il faut multiplier par 4 en haut et en bas dans la première fraction.

• Regardons $\frac{1}{3!\times 6!}+\frac{1}{4!\times 5!}$ le dénominateur commun sera $4!\times 6!$, il faut multiplier par 4 en haut et en bas la première fraction, et par 6 la seconde.

• Ici, pour $\frac{(n-1)!}{(p-1)!(n-p)!}+\frac{(n-1)!}{(p)!(n-p-1)!}$, le dénominateur commun est $p!\times(n-p)!$ et il faut multiplier en haut et en bas la première fraction par p et la seconde par $n-p$.

• Donc lançons la machine de guerre:

$$\frac{(n-1)!}{(p-1)!(n-p)!}+\frac{(n-1)!}{(p)!(n-p-1)!} = \frac{(n-1)!\times p+(n-1)!\times(n-p)}{(p)!(n-p)!}$$

Reste à simplifier le haut en le factorisant par $(n-1)!$:

$$(n-1)!\times p+(n-1)!\times(n-p) = (n-1)!\left[p+(n-p)\right] = (n-1)!\times n = n!$$

D'où $\binom{n-1}{p-1}+\binom{n-1}{p} = \frac{n}{(p)!(n-p)!} = \binom{n}{p}$.

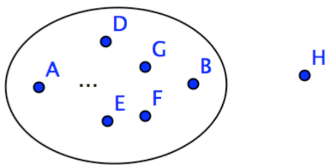
remarque L'énoncé, en donnant les formules, incitait à se lancer dans ce calcul, mais il faut savoir qu'il y a une autre manière de démontrer cette égalité, sans formules.

$\binom{n-1}{p-1}$ = le nombre de choix de p-1 élément parmi n-1

$\binom{n-1}{p}$ = le nombre de choix de p élément parmi n-1

$\binom{n}{p}$ = le nombre de choix de p élément parmi n

On dessine donc un sac à n-1 éléments (A,B,C etc.) auquel on adjoint un n-ième élément H.



On choisit p éléments. si les p éléments sont dans le sac, il y a $\binom{n-1}{p}$ choix possibles. Sinon si parmi eux on prend H on n'a alors que p-1 éléments dans le sac donc $\binom{n-1}{p-1}$ possibilités (et 1 possibilité pour H).

Ainsi $\binom{n-1}{p-1}+\binom{n-1}{p} = \binom{n}{p}$.

Aparté culturel:

Les nombres $\binom{n}{p}$, forment ce qu'on appelle le **triangle de Pascal**. La littérature du kangourou, des éditions Tangente ou des Apmep fournit de nombreuses anecdotes mathématiques sur ce triangle. Il a la forme suivante:

1				
1	1			
1	2	1		
1	3	3	1	
1	4	6	4	1

- La propriété $\binom{n-1}{p-1}+\binom{n-1}{p}=\binom{n}{p}$ indique que la somme de deux termes consécutifs en donne un troisième en dessous.
- Chaque ligne permet de développer $(a+b)^n$
- La somme de chaque ligne est une puissance de 2
- La somme alternée de chaque ligne (1-4+6-4+1) fait 0
- Les diagonales (1+3+1) donnent la suite de Fibonacci
- Le quotient des diagonales tend vers le nombre d'or.

Rappel: **calcul de $\binom{n}{p}$ dans des cas simples.**

On peut écrire $\binom{n}{p}=\frac{n(n-1)(n-2)\ldots}{p(p-1)(p-2)\ldots}$ avec autant de facteurs en haut qu'en bas. Exemples:

$\binom{50}{3}=\frac{50\times49\times48}{3\times2\times1}$ $\binom{10}{4}=\frac{10\times9\times8\times7\times6}{5\times4\times3\times2\times1}$

$\binom{8}{2}=\frac{8\times7}{2\times1}$ $\binom{11}{1}=\frac{11}{1}$

II) divers

1) probas simples

a) $\frac{cas\ favorables}{cas\ possibles}=\frac{\binom{7}{2}}{\binom{10}{2}}=\frac{7}{15}$.

b) Les jetons impairs sont les 1,3,5,7 blancs et 1,3 noirs

Il y en a donc 5 d'où $\frac{\binom{6}{2}}{\binom{10}{2}}=\frac{1}{3}$

c) Je calcule $p(A)\times p(B)=\frac{7}{45}$

Puis je détermine $p(A\cap B)$ (jetons blancs impairs donc 4 possibilités qui sont 1,3,5,7) $p(A\cap B)=\frac{\binom{4}{2}}{\binom{10}{2}}=\frac{2}{15}$

J'en conclus que A et B ne sont pas indépendants.

<u>*Remarque*</u> $p(A\cap B)=\frac{2}{15}=\frac{6}{45}$ *et* $p(A)\times p(B)=\frac{7}{45}$ *on n'est donc quand même pas loin de l'indépendance...*

Rappel: formules pour $A \cap B$ et $A \cup B$

• pour $A \cup B$ il y a une formule qui marche dans tous les cas $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$

• pour $A \cap B$ en général il n'y a pas de formule sauf 2 cas:

- si A et B sont disjoints (=incompatibles) alors $p(A \cap B) = 0$
- si l'énoncé vous dit que A et B sont indépendants alors $p(A \cap B) = p(A) \times p(B)$

• dans les autres cas il faut calculer $p(A \cap B)$ en cherchant le *sens* de $A \cap B$ (comme ici $A \cap B$=2 jetons blancs impairs). C'est ce qu'il faut faire en particulier si l'on doit démontrer que A et B sont indépendants: on calcule $p(A \cap B)$ d'un côté et $p(A) \times p(B)$ de l'autre;si c'est pareil ils sont indépendants.

Rappel: événements indépendants

•La probabilité que je tombe en panne sachant que le chat de ma voisine n'a pas mangé hier soir, est la même que la probabilité que je tombe en panne tout court.
Autrement dit $p_{chat}(panne) = p(panne)$. On comprend bien que le chat et la panne sont complètement indépendants.

• Donc la formule $p_A(B) = p(B)$ semble indiquer que A et B sont indépendants. Mais d'où sort-elle, cette formule ?

• $p_A(B) = p(B) \Leftrightarrow \dfrac{p(A \cap B)}{p(A)} = p(B)$. Et p(A) passe à droite...

2) variable aléatoire

a) Ce n'est pas la loi binômiale: on ne répète rien.
On doit donc procéder manuellement. C'est-à-dire qu'on doit examiner toutes les valeurs possibles de X et la probabilité de chaque valeur.

X peut valoir 0: deux jetons noirs $\dfrac{\binom{3}{2}}{\binom{10}{2}}$

X peut valoir 1: un noir un blanc $\dfrac{\binom{3}{1} \times \binom{7}{1}}{\binom{10}{2}}$

X peut valoir 2: deux jetons blancs $\dfrac{\binom{7}{2}}{\binom{10}{2}}$

Je résume tout cela dans un tableau:

xi	0	1	2
pi	1/15	7/15	7/15

b) E=1,4 je fais la somme des xi fois pi

$$E(X) = \sum p_i x_i = 0 \times \frac{1}{15} + 1 \times \frac{7}{15} + 2 \times \frac{7}{15} = 1,4$$

Exercice 4 (sur 5 points) (obligatoire) COMPLEXES

1) **distance, angle et figure**

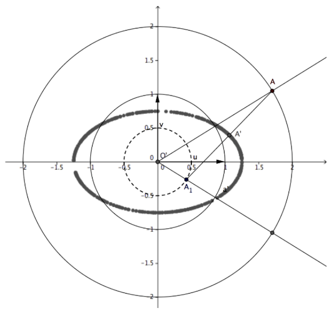
a) J'utilise les formules $AB = |b-a|$ et $\left(\vec{u},\vec{AB}\right) = \arg(b-a)$.

- $OM = |z-0| = |z|$
- $OM_1 = \left|\dfrac{1}{z}-0\right| = \left|\dfrac{1}{z}\right| = \dfrac{1}{|z|}$ donc $OM \times OM_1 = 1$.
- $\left(\vec{u},\vec{OM}\right) = \arg(z-0) = \arg z$
- $\left(\vec{u},\vec{OM_1}\right) = \arg\left(\dfrac{1}{z}-0\right) = \arg\dfrac{1}{z} = -\arg z$ d'où $\left(\vec{u},\vec{OM}\right) = -\left(\vec{u},\vec{OM_1}\right)$

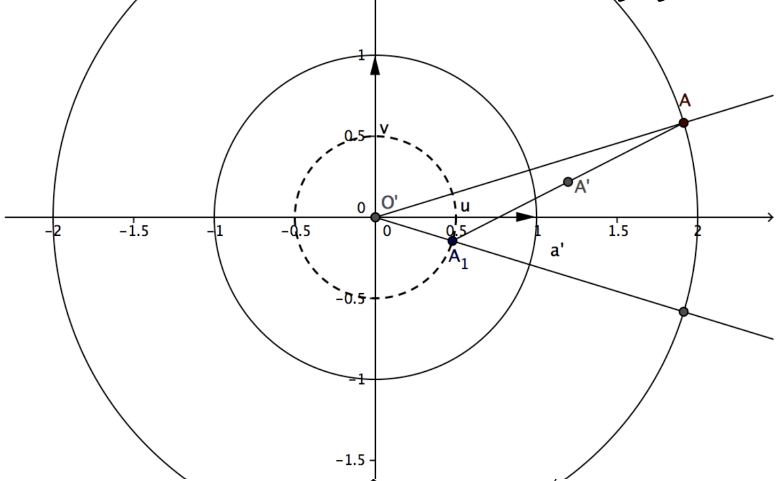
b) tous les points A de ce grand cercle de rayon 2 vérifient OA=2. Par conséquent ils ont tous un A_1 vérifiant $OA_1 = \dfrac{1}{2}$.

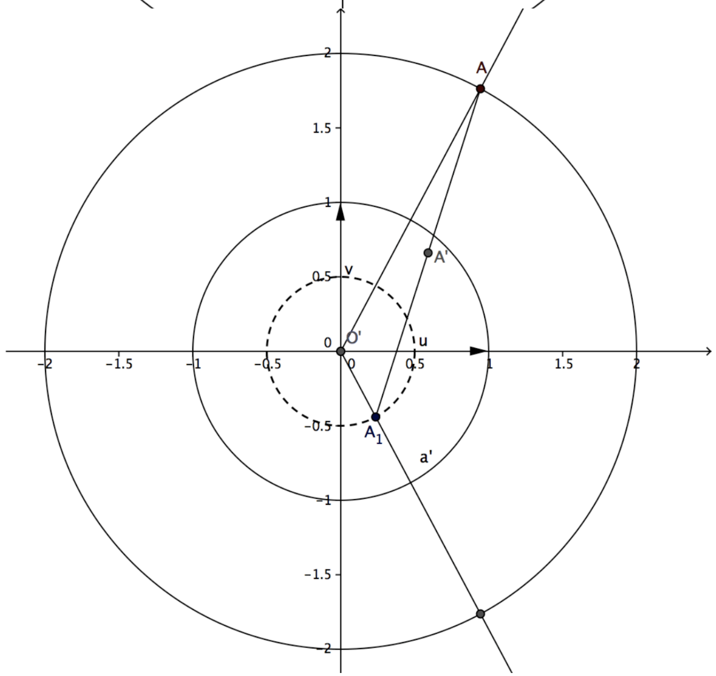
Il suffit donc de tracer un petit cercle c' de rayon 1/2 (pointillés), puis de prendre le symétrique de [OA] par rapport à l'axe horizontal et l'intersection avec c'.
Voici deux schémas pour deux positions différentes de A:
(colonne de droite)

REMARQUE HORS SUJET:
Les logiciels de géométrie dynamique (exemple geogebra) permettent d'animer des figures. Cela est extraordinaire. On peut donc représenter la trace du point A' quand A varie. C'est un peu le sel des mathématiques: chercher, conjecturer, voir pourquoi...



constructions de l'exercice 1)b):





2) **Quelques calculs**

a) M' milieu de $M(z)$ et $M_1\left(\frac{1}{z}\right)$ donc son affixe est

$M'\left(\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)\right)$ en vertu de la formule du milieu $I\left(\frac{a+b}{2}\right)$

b) $b'=\frac{1}{2}\left(2i+\frac{1}{2i}\right)=\frac{1}{2}\left(2i-\frac{i}{2}\right)=i-\frac{i}{4}=\frac{3i}{4}$

$c'=\frac{1}{2}\left(-2i+\frac{1}{-2i}\right)=-\frac{3i}{4}$ le calcul est en fait inutile: c est le conugué de b donc c' sera le conjugé de c.

En effet $\overline{\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)}=\frac{1}{2}\left(\bar{z}+\frac{1}{\bar{z}}\right)$ la trsf conserve le conjugué.

Rappel: **calculs simples à connaître dans C**

• $\frac{1}{i}=-i$	• $(1-i)^2=-2i$	
• $\frac{1}{2i}=-\frac{i}{2}$	• $(1+i)^2=2i$	
• $i^3=-i$	• $i^4=1$	• $i^{2n}=(-1)^n$

c) figure avec B et C
(page suivante)

3) point fixe

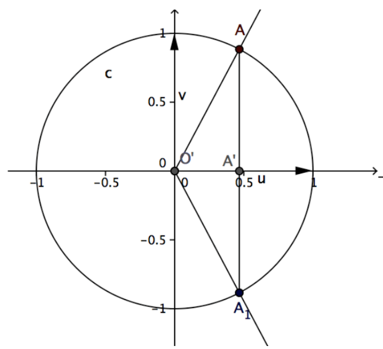
hors sujet: le petit schéma plus haut avec l'ellipse montre qu'il n'y aura pa de point fixe de module 2 le voyez vous ?

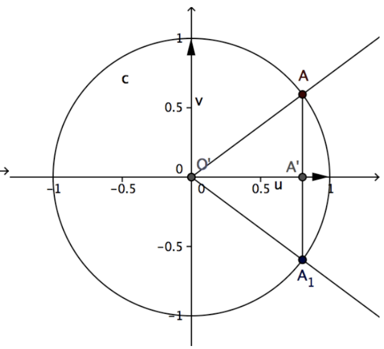
on doit résoudre $z=\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)$. On suppose $z\neq 0$ et l'on multiplie par z (et par 2 aussi) à gauche et à droite.
L'équation équivaut donc à:
$2z^2=z^2+1$ soit $z^2=1$ soit $z=1\,ou-1$

Approfondissement: **équations de degré n**
- une équation de "degré 3" par exemple c'est une équation du type $z^3+az^2+bz+c=0$
- une équation de degré *n* ne peut pas avoir plus que *n* solutions.
- l'un des plus grands théorèmes de l'analyse affirme qu'un polynome de degré *n* possède toujours *n* racines dans **C**, éventuellement confondues.
- dans **R** par contre c'est faux, exemple en degré 2 dès que Δ est négatif il n'y a pas de solutions.

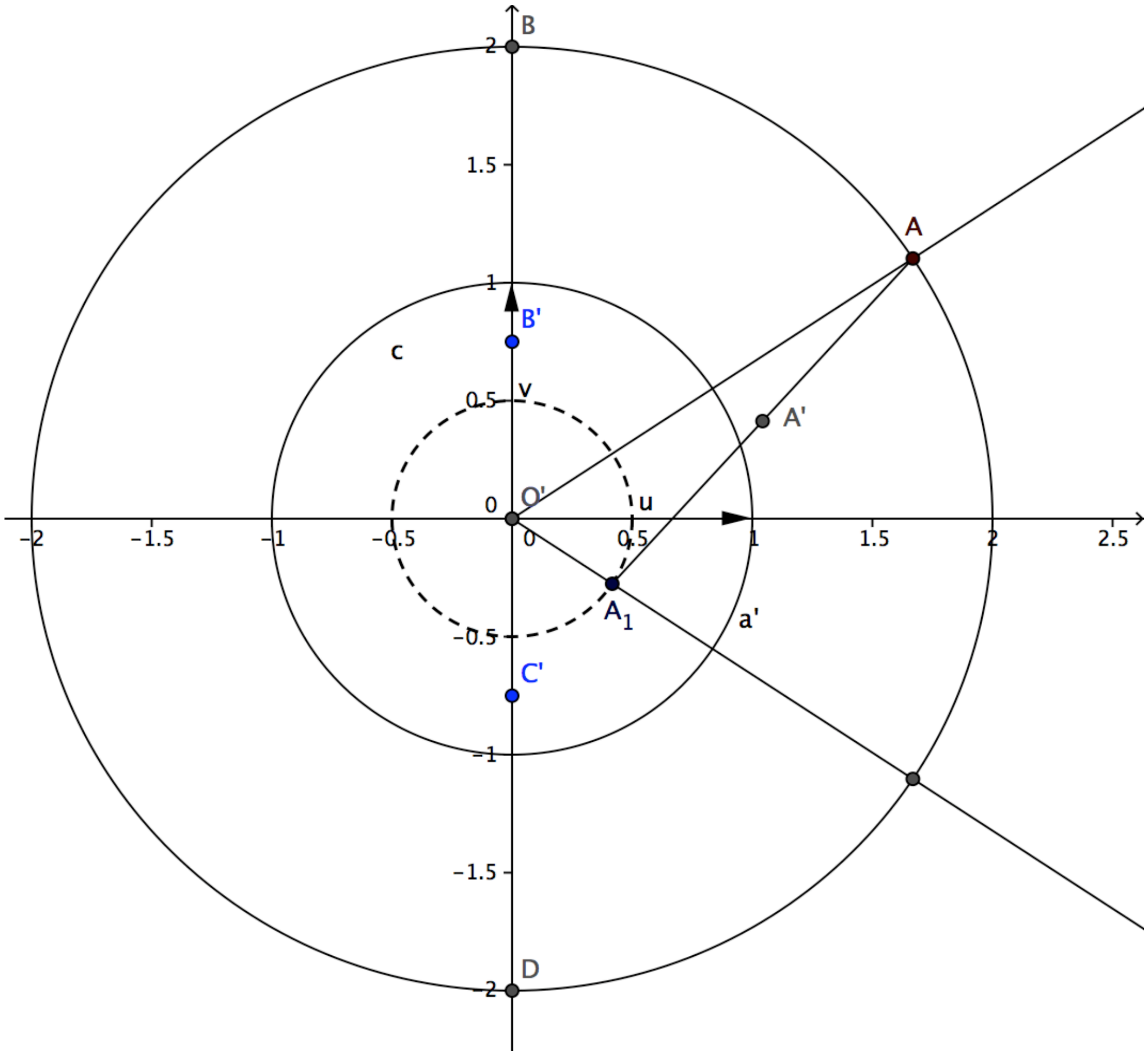
4) **recherche**

déja, en vertu de la réponse 1)a), si $|z|=1$ alors $|z_1|=1$.
Donc, si M est sur le cercle trigonométrique, M_1 est simplement son symétrique par rapport à l'axe horizontal.





Il est donc clair que le milieu de M et M_1 sera sur le segment [-1;1] de l'axe des réels.
Sur ce schéma on visualise les deux points fixes (amener A à l'extrémité droite ou gauche du cercle trigo)



B
2
1.5
A
1
B'
c
v
0.5
A'
0
O'
u
-2
-1.5
-1
-0.5
0
0.5
1
1.5
2
2.5
A_1
a'
-0.5
C'
-1
-1.5
D
-2

Exercice 4 (sur 5 points) (spé) ARITHMÉTIQUE

1) **des congruences**

a) je trouve d'abord une solution évidente, ici (1,1)
ensuite je transforme l'équation
$8x-5y=3 \Leftrightarrow 8x-5y=8\times 1-5\times 1$ puis je trouve
$8x-5y=3 \Leftrightarrow 8(x-1)=5(y-1)$

5 et 8 sont premiers entre eux.
5 divise 8(x-1) donc 5 divise (x-1), j'écris donc x=1+5k
je remplace:
$8(1+5k-1)=5(y-1) \Leftrightarrow 8\times 5k=5(y-1) \Leftrightarrow 8k=y-1$

d'où les solutions $\begin{cases} x=1+5k \\ y=1+8k \end{cases}$ avec $k \in Z$

remarque
On aurait pu procéder en parallèle pour x et y:
5 et 8 sont premiers entre eux.
5 divise 8(x-1) donc 5 divise (x-1), j'écris donc x=1+5k
8 divise 5(y-1) donc 8 divise (y-1), j'écris donc y=1+8k
mais qui nous prouve que ce sont les mêmes "k" dans les deux cas ?

b) j'écris m=m et cela donne: $8p+1=5q+4 \Leftrightarrow 8p-5q=3$

j'en déduis donc $\begin{cases} p=1+5k \\ q=1+8k \end{cases}$. Ensuite les deux équations donnent le même résultat $m=9+40k$ avec $k \in Z$.

remarque
C'est réciproque: si $m=9+40k$, alors :
• modulo 8, $m=1+40k=1$ donc m s'écrit $m=1+8p$
• modulo 5, $m=4+40k=4$ donc m s'écrit $m=4+5q$
mais il n'y a bien sûr aucune raison que p et q soient égaux.

c) si vous ne savez pas quoi répondre dites 2009... :-)
ici il suffit de déterminer les congrus à 9 modulo 40:
9 qui s'écrit 8+1 et 5+4
49 qui s'écrit 8x5+1 et 5x9+4
89 qui s'écrit 8x10+1 et 5x17+4...
pour dépasser 2000 il suffit d'écrire... 2009 !

2) **a rest is silence**

a) on sait que $8 \equiv 1 (\text{mod } 7)$

par conséquent quelque soit l'entier naturel *k*, $8^k \equiv 1^k (\text{mod } 7)$

or quelle que soit la congruence, $1^k = 1\times 1\times \ldots \times 1$ est toujours égal à 1, et quelle que soit la congruence aussi, 8 est toujours égal à $2^3 = 2\times 2\times 2$. Par conséquence notre résultat $8^k \equiv 1^k (\text{mod } 7)$ peut s'écrire aussi $2^{3k} \equiv 1 (\text{mod } 7)$.

b) cherchons à écrire 2009 sous la forme 3k plus quelque chose. On connaît un critère pour la divisiblité par 3 (la somme des chiffres). Par conséquent, 2009=2007+2 est intéressant car 2007=3k peu importe la valeur de k
d'où $2^{2009} = 2^{2007+2} = 2^{2007} \times 2^2 \equiv 1\times 2^2 (\text{mod } 7)$ d'où: $2^{2009} = 4 (\text{mod } 7)$
Naturellement on ne peut pas espérer vérifier à la calculatrice car 2^{2009} dépasse largement les capacités de toutes les machines...

remarque
en informatique on utilise l'approximation $2^{10} \approx 10^3$. On peut avec ça se faire une idée du nombre de chiffres après la virgule de 2^{2009}.
$2^{2009} = 2^{2000} \times 512 = (2^{10})^{200} \times 512 \approx (10^3)^{200} \times 512$ soit $5{,}12 \times 10^{602}$!!
Bien sûr plus on élève à des puissances plus les erreurs d'arrondis se creusent mais vu que $2^{10} > 10^3$ on a une valeur minimale !

3) **recherche**

a) $10^3+1=1001=143\times 7$ ce qui répond à la question

b) on a des nombres $a\times 10^3+b$

réduisons modulo 7, cela donne: $a\times 10^3+b\equiv b-a\pmod 7$

ce que nous cherchons revient donc à dire $b-a\equiv 0\pmod 7$

donc b-a=0 ou 9.

Ainsi nous obtenons les nombres

7000 8001 9002
1008 2009

et les palindromes

1001 2002 3003 4004 5005 6006 7007 8008 9009

La vérification n'est pas nécessaire mathématiquement, mais nous allons quand même la faire, pour le plaisir de voir que les maths ça marche

7000=7x1000 8001=7x1143 9002=7x1286
1008=7x144 2009=7x287

logique, si l'on avance de 1001 en 1001, la division par 7 avance de 143 en 143.

division par 7 des palindromes:

1001	2002	3003	4004	5005	6006	7007	8008	9009
143	286	429	572	715	858	1001	1144	1287