Image d'un intervalle par une fonction continue

Théorème 1 :

L'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle.

Théorème 2 : Théorème des valeurs intermédiaires

Soit f une fonction continue sur un intervalle I.

Soit a et b deux réelles de I tels que a<b. Pour tous réel k compris entre f(a) et f(b) l'équation f(x)=k admet au moins une solution dans $[a,b]$.

En particulier, si f(a) .f(b) <0 alors l'équation f(x)=0 admet au moins une solution dans $]a,b[$.

Théorème 3 : c'est un corollaire du théorème des valeurs intermédiaires

Soit f une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I.

Soit a et b deux réelles de I tels que a<b. Pour tous réel k compris entre f(a) et f(b) l'équation f(x)=k admet une unique solution dans $[a,b]$.

Théorème 4 :

Soit f une fonction continue sur un intervalle I.

Si la fonction f ne s'annule en aucun point de I alors f garde un signe constant sur I.

Théorème 5 :

L'image d'un intervalle fermé borné $[a,b]$ par une fonction continue est un intervalle fermé borné $[m,M]$. (Notation : $f([a,b])=[m,M]$).

Le réel m est le minimum de f sur $[a,b]$.
Le réel M est le maximum de f sur $[a,b]$.

Théorème 6 :

1. Soit f une fonction définie sur un intervalle de type $I = [a,b[\ (a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R})$

   - Si la fonction f est croissante et majorée alors :

     $\lim_{x \to b^-} f(x) = l \in \mathbb{R}$.

   - Si la fonction f est croissante et non majorée alors :
     $\lim_{x \to b^-} f(x) = +\infty$.

2. Soit f une fonction définie sur un intervalle de type $I = [a,+\infty[\ (a \in \mathbb{R})$:

   - Si la fonction f est croissante et majorée alors :

     $\lim_{x \to +\infty} f(x) = l \in \mathbb{R}$.

   - Si la fonction f est croissante et non majorée alors :
     $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

3. Soit f une fonction définie sur un intervalle de type $I =]a,b] (a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R})$:

   - Si la fonction f est décroissante et minorée alors :

     $\lim_{x \to a^+} f(x) = l \in \mathbb{R}$.

   - Si la fonction f est décroissante et non minorée alors :

     $\lim_{x \to a^+} f(x) = -\infty$.

4. Soit f une fonction définie sur un intervalle de type $I =]-\infty, b] (b \in \mathbb{R})$:

   - Si la fonction f est décroissante et minorée alors :
     $\lim_{x \to -\infty} f(x) = l \in \mathbb{R}$.

   - Si la fonction f est décroissante et non minorée alors :
     $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$.

Image d'un intervalle I par une fonction f continue et monotone sur I

Intervalle I	Si f est croissante sur I	Si f est décroissante sur I
$I=[a,b]$	$f(I)=[f(a),f(b)]$	$f(I)=[f(b),f(a)]$
$I=[a,b[\ (a\in\mathbb{R},b\in\mathbb{R})$	$f(I)=\left[f(a),\lim\limits_{x\to b^-}f(x)\right[$	$f(I)=\left]\lim\limits_{x\to b^-}f(x),f(a)\right]$
$I=[a,+\infty[\ (a\in\mathbb{R})$	$f(I)=\left[f(a),\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)\right[$	$f(I)=\left]\lim\limits_{x\to+\infty}f(x),f(a)\right]$
$I=]a,b[\ (a\in\mathbb{R},b\in\mathbb{R})$	$f(I)=\left]\lim\limits_{x\to a^+}f(x),\lim\limits_{x\to b^-}f(x)\right[$	$f(I)=\left]\lim\limits_{x\to b^-}f(x),\lim\limits_{x\to a^+}f(x)\right[$
$I=]-\infty,b](b\in\mathbb{R})$	$f(I)=\left]\lim\limits_{x\to-\infty}f(x),f(b)\right]$	$f(I)=\left[f(b),\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)\right[$
$I=]-\infty,+\infty[\ =\mathbb{R}$	$f(I)=f(\mathbb{R})=\left]\lim\limits_{x\to-\infty}f(x),\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)\right[$	$f(I)=f(\mathbb{R})=\left]\lim\limits_{x\to+\infty}f(x),\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)\right[$
$I=]-\infty,b[\ (b\in\mathbb{R})$	$f(I)=\left]\lim\limits_{x\to-\infty}f(x),\lim\limits_{x\to b^-}f(x)\right[$	$f(I)=\left]\lim\limits_{x\to b^-}f(x),\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)\right[$
$I=]a,+\infty[\ (a\in\mathbb{R})$	$f(I)=\left]\lim\limits_{x\to a^+}f(x),\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)\right[$	$f(I)=\left]\lim\limits_{x\to+\infty}f(x),\lim\limits_{x\to a^+}f(x)\right[$
$I=]a,b](a\in\mathbb{R},b\in\mathbb{R})$	$f(I)=\left]\lim\limits_{x\to a^+}f(x),f(b)\right]$	$f(I)=\left[f(b),\lim\limits_{x\to a^+}f(x)\right[$