BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

Session 2010

MATHÉMATIQUES

Série S

Enseignement Obligatoire

Durée de l'épreuve : 4 heures – Coefficient : 7

Ce sujet comporte 6 pages numérotées de 1 à 6.

Du papier millimétré est mis à la disposition des candidats.

L'utilisation d'une calculatrice est autorisée.

Le candidat doit traiter les quatre exercices.

Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.

Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Exercice 1 (4 points)

L'espace est rapporté à un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Les points A, B et C ont pour coordonnées respectives : $A(1,-2,4)$ $B(-2,-6,5)$ $C(-4,0,-3)$.

1. a) Démontrer que les points A, B et C ne sont pas alignés.
   b) Démontrer que le vecteur $\vec{n}(1,-1,-1)$ est un vecteur normal au plan (ABC).
   c) Déterminer une équation du plan (ABC).

2. a) Déterminer une représentation paramétrique de la droite passant par le point O et orthogonale au plan (ABC).
   b) Déterminer les coordonnées du point O', projeté orthogonal du point O sur le plan (ABC).

3. On désigne par H le projeté orthogonal du point O sur la droite (BC).
   Soit t le réel tel que $\overrightarrow{BH} = t\overrightarrow{BC}$.
   a) Démontrer que $t = \dfrac{\overrightarrow{BO} \cdot \overrightarrow{BC}}{\left\|\overrightarrow{BC}\right\|^2}$.
   b) En déduire le réel t et les coordonnées du point H.

Exercice 2 (3 points)

Une urne contient des boules indiscernables au toucher.

20 % des boules portent le numéro 1 et sont rouges.

Les autres portent le numéro 2 et parmi elles, 10 % sont rouges et les autres sont vertes.

1. On tire une boule au hasard. Quelle est la probabilité qu'elle soit rouge ?

2. On a tiré une boule au hasard. Elle est rouge.

   Montrer que la probabilité qu'elle porte le numéro 2 est égale à $\frac{2}{7}$.

3. Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2.

   On effectue n tirages successifs d'une boule avec remise (après chaque tirage la boule est remise dans l'urne).

   a) Exprimer en fonction de n la probabilité d'obtenir au moins une boule rouge portant le numéro 1 au cours des n tirages.

   b) Déterminer l'entier n à partir duquel la probabilité d'obtenir au moins une boule rouge portant le numéro 1 au cours des n tirages est supérieure ou égale à 0,99.

Exercice 3 (5 points)

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(\mathrm{O};\vec{u},\vec{v})$ d'unité graphique 2 cm.

On réalisera une figure que l'on complétera tout au long de l'exercice.

On considère les points A d'affixe i, B d'affixe $-2\mathrm{i}$ et D d'affixe 1.

On appelle E le point tel que le triangle ADE soit équilatéral direct.

Soit f l'application qui à tout point M d'affixe z ($z \neq \mathrm{i}$) associe le point M' d'affixe z' définie par :

$$z' = \frac{2z - \mathrm{i}}{\mathrm{i}z + 1}.$$

1. Démontrer que le point E a pour affixe $\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(1+\mathrm{i})$.

2. Exprimer sous forme algébrique l'affixe du point D' associé au point D par l'application f.

3. a) Démontrer que, pour tout nombre complexe z différent de i, $(z'+2\mathrm{i})(z-\mathrm{i}) = 1$.

   b) En déduire que pour tout point M d'affixe z ($z \neq \mathrm{i}$) :

   $\mathrm{BM}' \times \mathrm{AM} = 1$

   et $\left(\vec{u},\overrightarrow{\mathrm{BM}'}\right) = -\left(\vec{u},\overrightarrow{\mathrm{AM}}\right) + k \times 2\pi$ où k est un entier relatif.

4. a) Démontrer que les points D et E appartiennent au cercle (C) de centre A et de rayon $\sqrt{2}$.

   b) En utilisant les résultats de la question 3b), placer le point E' associé au point E par l'application f. On laissera apparents les traits de construction.

5. Quelle est la nature du triangle BD'E' ?

ANNEXE

Cette page sera complétée et remise avec la copie à la fin de l'épreuve.

Exercice 4